

連載 (講義)

電子光学入門

— 電子分光装置の理解のために —

(第4回)

嘉藤 誠

日本電子 (株) 〒196-8558 東京都昭島市武蔵野 3-1-2

kato@jeol.co.jp

(2005 年 1 月 31 日受理)

電子分光系において、電子ビームの輸送のために静電レンズがもちいられる場合があります。また電子の加減速を行う際には、必然的にレンズ作用が伴い、よってそのような系は静電レンズとしての扱いが必要です。今回は静電レンズの近軸理論を導き、これをもとにしてレンズとしての基本的なはたらきを調べます。電子分光系の解析のためにエミッタンスの概念が不可欠ですが、これも近軸理論をもとに議論します。

Introduction to Electron Optics for the Study of Energy Analyzing Systems (4)

M. Kato

JEOL Ltd., 3-1-2 Musashino, Akishima, Tokyo 196-8558.

kato@jeol.co.jp

(Received: January 31, 2005)

In the instruments of electron spectroscopy, electrostatic lenses are commonly used for the transport of electron beams. Acceleration or deceleration of electrons is often required, and such a process is inevitably accompanied by lens action. In this chapter, we first derive the paraxial theory of electrostatic lenses, and then investigate their optical characteristics in detail. The concept of emittance is important in the systems for spectroscopy. This is also studied under the paraxial theory.

4 静電レンズ系の近軸特性

4.1 はじめに

光学レンズ系および電子光学系は、光軸の近傍だけを考えるなら理想的なレンズ作用を示します。そこで議論の対象を光軸付近に限定して、その領域における光学特性、すなわち近軸特性を理解することが重要となります。今回は、静電レンズ系の近軸特性を議論します。

電子光学系の近軸理論は、厳密な軌道方程式から高次の非線形項をすべて落とし、線形項のみを残すことで得られます。このようにして得られる線形の方程式

は、1次軌道方程式 (first-order trajectory equation), あるいは近軸軌道方程式とよばれます。1次軌道方程式をみたす軌道は収差の影響を含まないので、一点から出発した電子ビームはかならず別の一点に集束します。この1次軌道をもとにして、物面と像面の位置関係や、像倍率、焦点距離などの、いわゆる近軸特性が調べられることになります。

電子光学系の1次軌道方程式、あるいは高次の収差の表式を導くには、前章で証明した最小作用の原理を適用すれば楽に行えます。しかし、最初から変分原理をもちいたのでは具体的なイメージをもちにくいはずです。本章では静電レンズの近軸特性を議論

するだけなので、軌道方程式だけで済ますことができます。次回以降の一般の議論においては、変分原理によって同じ結果が得られることを確認したうえで、より高次の定式化に進むことにします。

さて、本講座のメインテーマは電子分光です。電子分光装置の主役はエネルギーアナライザですが、アナライザまでのビームの輸送のために静電レンズ系が多くもちいられます。また、ビーム輸送の途中で電子の加速あるいは減速が行なわれる場合があります。加減速の際には、それに付随してレンズとしての作用が「必ず」現れます。これは、静電レンズをもちいる場合だけではなく、たとえば二枚のメッシュの間に一様な加減速場をつくったつもりでも、メッシュ孔の一つ一つがレンズとしてはたらいてビームを分散させます。

このように、電子分光系においては静電レンズのはたらきを詳しく知ることが大切です。静電レンズの作用の本質は、ほとんど近軸近似による理論によって知ることができます。電子分光においてとくに重要なエミッタンスの概念に関しても同様です。加減速にともなうエミッタンスの変化に関しては、収差の影響を除外した近軸理論によって明快な議論が可能となります。

4.2 近軸近似ということの意味

レンズのなすべき作用については第1章で簡単に述べましたが、まだ十分には本質を議論していません。レンズのはたらきに関して重要なことは、「なぜ光軸という特別な軸が存在するのか?」ということです。近軸近似というものを理解するために、この問題をまず考えておく必要があります。

Fig.1のように、凸レンズによって点光源の像をつくりたいとします。この際にレンズがなすべきことは、やってきた光線を一定の法則にしたがって屈折させることです。具体的には、レンズ面における光軸からの距離（入射高といいます）を x_1 としたとき、 x_1 に比例した量だけ光線の傾き x' を変化させることができれば、ボケのない点光源の像が形成されます。（証明が必要ですが、ここでは行いません。）

このはたらきを式で書けば、次のようになります。

$$x'_2 - x'_1 = -\frac{1}{f} x_1 \quad (1)$$

ここで、 x'_1 と x'_2 は屈折前後の光線の傾きです。屈折力、すなわち傾きの変化量 $x'_2 - x'_1$ が入射高に比例す

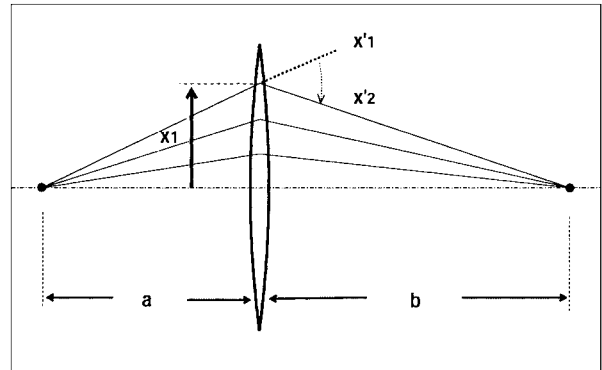


Fig. 1: Ideal action of a convex lens. The change of inclination $x'_2 - x'_1$ is proportional to the height x_1 of the ray in the entrance plane of the lens.

るとき、その比例係数を $-1/f$ とおき、 f を焦点距離とよびます。 f が正のときは傾きを光軸側に向けようとする集束作用、つまり凸レンズの場合であり、 f が負の場合は凹レンズの作用を表します。ここでは凸レンズの場合を述べていますが、適当に解釈を広げれば凹レンズにたいしても適用できる議論です。

(1) の関係は、第1章で述べた薄肉レンズの公式、

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (2)$$

と等価です。これを証明するには、(2) の両辺に入射高 x_1 をかけ、 $x'_1 = x_1/a$ 、 $x'_2 = -x_1/b$ の関係を持ちいれば(1)になります。(1) が理想的なレンズ作用を表わすことは、この事実からわかります。

(1) というレンズ作用のもとで、広がった物体が結像される様子を見てみましょう。Fig.2のように、軸上光源 O と同一面上に点光源 A 、 B をおいたとします。 A から出た光線は、 O からの光線よりも入射高が大きいので、(1) によって、傾きの変化量が一定値だけ増えます。すなわち、 O からの光線よりも一定値だけ強い屈折作用をうけて、光軸にたいして A と反対側の位置に像 A' がつくられます。 B はさらに入射高が大きいので、 A' よりも光軸からはなれた場所に像 B' ができます。（この議論から、一個の凸レンズが実像をつくるなら、必然的に倒立像になることが理解されるでしょう。）

このように、レンズの作用は(1)ですべて尽くされています。重要なことは、(1)において、光軸というものが特別な存在であるということです。一点から出た光線が一点に集まるのも、広がった物体の像が形成されるのも、すべて「光軸からの距離に比例した屈折力」によるわけです。

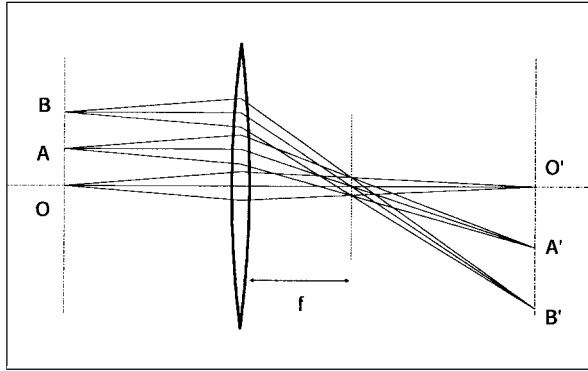


Fig. 2: Image formation by an ideal convex lens.

もし (1) の関係が不完全にしか成り立たないレンズがあったとすると、軸上においた点光源の像がボケてしまいます。これは球面収差にほかなりません。また同様に、軸外の点光源の像もボケてしまいます。このボケの大きさが軸上光源のボケと異なれば、そのときは軸外収差が存在するわけです。このように、球面収差と軸外収差はまったく別ものなのではなく、どちらも (1) という理想的な作用からのずれとして説明されます。

(1) の関係が厳密にみたされない場合は、右辺は x_1 に比例しなくなり、なにか非線形な関数になるでしょう。しかし光軸付近に限るなら、いつでも直線の関係で近似できるはずで、この、比例関係で近似するというのが、近軸近似ということにほかなりません。つまり、理想的なレンズ作用をもつとみなされるような光軸付近の領域に理論を限定するということです。そして、その領域をこえたときに現れる非線形項の寄与が、収差とよべます。

さて、電子レンズの場合には、電子軌道の傾きが不連続に変わることはなく、つねに連続的な変化をします。電子軌道を $x = x(z)$ のかたちで与えるなら、(1) の左辺に対応するのは傾き $x'(z)$ の変化率、すなわち $x''(z)$ です。そこで、(1) の作用を電子軌道にたいする作用として与えるなら、次のかたちになるでしょう。

$$x'' = -b(z)x \quad (3)$$

ここで $b(z)$ は、屈折作用の分布のしかたを与える関数です。もしこの作用が $z = z_1$ から z_2 までの狭い範囲に局在している場合には、(1) と同じかたちで書き換えることができます。すなわち、上式の両辺をその

範囲で積分することにより、

$$x'_2 - x'_1 = -x_1 \int_{z_1}^{z_2} b(z) dz \quad (4)$$

が得られます。ここでは、積分範囲内では軌道の高さはあまり変化しないと仮定して、 $x(z)$ を $x_1 = x(z_1)$ で置きかえ、積分のまえに出しています。これを (1) と見比べるなら、

$$\frac{1}{f} = \int_{z_1}^{z_2} b(z) dz \quad (5)$$

として焦点距離が与えられます。

このように、電子光学において (1) に対応する条件は (3) で与えられ、これは電子軌道にたいしての微分方程式と見ることができます。もし電子軌道をあたえる方程式が (3) のかたちになるなら、それは理想的なレンズ作用を意味します。そこで、電子レンズ中の軌道方程式は、少なくとも光軸の近傍では (3) のかたちになることが期待されます。

ところが、静電レンズの軌道方程式にたいして近軸近似を行った場合、結果として得られる 1 次軌道方程式は (3) のかたちにはなりません (!)。くわしく言えば、(3) の右辺のような x に比例する項に加えて、 x' に比例する項が付加されます。そして、それにもかかわらず、静電レンズは近軸近似において理想的なレンズ作用をもつのです。

これがなにを意味するかといえ、静電レンズにおいては、光学レンズには対応しない別種の結像作用が含まれるということです。実は、次回に述べる磁界レンズの場合は、1 次軌道方程式はまさに (3) のかたちになり、したがって光学レンズと正確に対応します。その意味では、静電レンズより磁界レンズのほうがはたらかが単純であると言えます。(磁界レンズの解析のためにはラーモア座標系に移る必要があるのですが、どちらが単純かは簡単には言えませんが。)

以下の節においては、まず静電レンズの 1 次軌道方程式を具体的に導き、その解の性質を微分方程式の一般論によって調べたのちに、ここで述べた問題を詳しく議論することにします。

4.3 1 次軌道方程式の導出

4.3.1 電場中の軌道方程式

静電レンズのはたらかを具体的に調べるために、まず 1 次軌道方程式を導きましょう。第 2 章において、運動方程式から時間を消去した軌道方程式をすでに導

いているので、それを出発点にします。\$z\$ 座標を独立変数とした軌道方程式をもちいることにすると、静電場 \$\mathbf{E}(x, y, z) = (E_x(x, y, z), E_y(x, y, z), E_z(x, y, z))\$ の中で、非相対論的な軌道方程式は次のようになります。

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{2\Phi}(x'E_z - E_x)(1 + x'^2 + y'^2) \\ y'' = \frac{1}{2\Phi}(y'E_z - E_y)(1 + x'^2 + y'^2) \end{cases} \quad (6)$$

これは電子軌道 \$x(z)\$, \$y(z)\$ にたいしての連立2階常微分方程式であり、導出のもとになった運動方程式と等価です。この導出過程において、電場の空間的な対称性はなにも仮定されていないので、軸対称とはかぎらず任意の電場分布にたいして適用できます。なお、相対論補正まで含めると定式化がかなり複雑になるので、次回で変分原理を適用するまでは、すべて非相対論的な扱いをします。

上式における \$\Phi = \Phi(x, y, z)\$ は加速ポテンシャルです。電場との関係 \$\mathbf{E} = -\nabla\Phi\$ をもちいれば、(6)における場の量は \$\Phi\$ だけで表されて、次式のようになります。

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{2\Phi} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - x' \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) (1 + x'^2 + y'^2) \\ y'' = \frac{1}{2\Phi} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - y' \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) (1 + x'^2 + y'^2) \end{cases} \quad (7)$$

ここで、第2章の復習になりますが、加速ポテンシャル \$\Phi\$ に関しての注意点を記しておきます。\$\Phi\$ は単に電場を \$\mathbf{E} = -\nabla\Phi\$ として与えるというだけではなく、\$e\Phi(x, y, z)\$ が \$(x, y, z)\$ という場所における電子の運動エネルギーを与えるように付加定数が決められています。すなわち、

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\Phi(x, y, z) \quad (8)$$

ということで、よって \$\Phi\$ はいつでも正の量です。通常は、\$\Phi\$ とは加速電圧に初期エネルギー分を上のせしたものと考えておけばいいでしょう。初期エネルギー分を忘れて、\$\Phi\$ をアースから測った実際の電位値にしてしまうと、数値計算の際に間違った結果を与えるので注意が必要です。

なおこれも第2章で述べましたが、軌道方程式(6)あるいは(7)には電子の質量 \$m\$ と電荷 \$-e\$ が含まれていません。運動方程式から時間を消去することによって、運動の道すじ、すなわち軌道は荷電粒子の種類にはよらなくなります。ただしそう言えるのは、非相対論的な場合だけです。

さて、(7)における \$\Phi\$ は、自由空間においてつぎのラプラス方程式 (Laplace equation) をみたす必要があります。

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (9)$$

もし空間に電荷分布が存在するなら、右辺に電荷分布の項が付加され、そのときはポアソン方程式 (Poisson equation) とよばれます。電子軌道を求める際に、ビームを構成している他の電子の影響を考慮するために空間電荷を想定することがあります。あるいは、電子軌道を制御するために、積極的に空間に電荷分布を形成することも考えられます。

静電レンズのつくる \$\Phi\$ は通常は、ラプラス方程式を与えられた境界条件のもとで数値的に解くことで与えられます。この境界条件は、静電レンズを構成する電極形状とその電位によって与えられるものです。

ラプラス方程式を数値的に解くための手法は大きく分けて二つあります。一つは空間全体をメッシュ分割する手法で、有限要素法や差分法がこれに属します。もう一つは一般に境界要素法と総称され、境界条件を与える面上だけを分割します。表面電荷法や電荷重畳法とよばれるものは後者に属します。表面だけ分割すればよいという点では境界要素法が有利ですが、たとえば磁性体のような非線形要素を含む系で磁場を計算するときは、有限要素法に類する手法が適しています。

これらの二つの手法で静電ポテンシャルを求める場合、単に精度のこととは別に、もっと本質的な違いが生じます。境界要素法においては、なんらかの電荷要素を境界上にならべて、それらがつくるポテンシャルの重ね合わせによって各点のポテンシャルを求めます。一つの電荷要素がつくるポテンシャルは解析的に与えられ、厳密にラプラス方程式をみたします。そこで、複数の要素がつくるポテンシャルを重ね合わせたものもラプラス方程式をみたすことになります。(もちろん計算機の精度範囲内ということです。) 一方、有限要素法や差分法ではそのような保障がありません。

与えられた解がラプラス方程式をみたすことが保障されれば、たとえある程度の誤差を含むとしても、それは実現可能なポテンシャル分布です。すなわち、最初に指定した境界条件にたいしての解からは少しはずれていたとしても、別の境界条件が存在して、それにたいしての厳密解になっているはずです。よって、そのような場の中で計算した電子軌道は、現実

こりうる軌道であるわけです。

一般に運動法則とよばれるものは、運動方程式をみたす運動がもつ性質のことです。その際、空間に存在する場がみたすべき性質に関しては、ふつうは特別な条件は課せられません。今の場合でいえば、静電ポテンシャルがマックスウェル方程式からの制約をみたすかどうかとは無関係に、任意のポテンシャル中の運動がもつ性質が議論されます。たとえば、リュービルの定理がそのような運動法則です。

一方、軸対称な電子レンズの収差が必ず一定符号であるというシェルツァーの定理 (第1章, 第2章を参照してください) は、ラプラス方程式をみたす場についてのはなしです。たとえば空間電荷が存在して、ポテンシャルがポアソン方程式に従うなら、そのような定理は成立しなくなります。そこで通常の電子レンズの計算においては、数値計算が与えるポテンシャル分布がラプラス方程式をみたすという性質は大きな意味をもちます。

さて (7) にもどりましょう。この式において、 $\Phi = \Phi(x, y, z)$ の引数のうちの z は独立変数ですが、 x と y は未知関数です。よって一般に、(7) は未知関数に関する非線形の方程式です。(右辺に $x^2 + y^2$ という2次の項があることではじめて非線形になるのではありません。) しかも $\Phi(x, y, z)$ は、最初に解析的な式で与えるのでないかぎり、数値計算でのみ与えられるものです。すなわち、あらかじめ数式として書き下すことすら出来ないわけです。

われわれの目標は、光軸すなわち z 軸にたいしてあまり離れることのない、近軸領域での電子の軌道方程式を導くことです。そのような軌道は、 $x(z)$ と $y(z)$ はどんな z にたいしても小さい値のままであり、したがって、傾き $x'(z)$, $y'(z)$ もまた小さい値に保たれます。よって軌道が十分光軸に近ければ、(7) の右辺を x , y , x' , y' に関してべき展開して、線形項すなわち1次の項のみを残し、高次の項を無視することができます。そのようにして得られるものが1次軌道方程式です。次節では、その作業の第1段階として、 Φ のべき展開を行います。

4.3.2 加速ポテンシャルの展開

前節における (7) の右辺から線形項を取り出すために、まず $\Phi(x, y, z)$ を x と y に関してべき展開する必要があります。しかし、 Φ はあらかじめ数式で与えられるわけではありません。では、 Φ をべき展開するとどんな意味でしょうか。

まず、要求されている展開式はどんなかたちであるかを考えてみます。それは、 x と y の低次の項によって Φ の光軸付近の分布が与えられ、そこから軸外に離れていくほど高次の項が寄与するようなものです。そこで、とりあえず次のかたちを想定することができます。

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}(z) x^m y^n \quad (10)$$

上式はもっとも一般の展開式ですが、ここでは軸対称な静電レンズを考えたいので、 Φ として軸対称関数のみを考慮します。 $\Phi(x, y, z)$ が軸対称であるとは、 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ において円柱座標における関数 $\Phi(r, \theta, z)$ として書き換えたときに、これが θ を含まずに $\Phi(r, z)$ のかたちになることです。そのような関数を上式のかたちに展開するなら、 x と y は $r^2 = x^2 + y^2$ のべきでのみ含まれるはずです。すなわち、

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) r^{2n} \quad (11)$$

のようにおけます。ここで、円柱座標における r はつねに $r \geq 0$ として考えます。(極座標や円柱座標において r に負の値を許すと混乱のもとになるので、ここでは避けることにします。)

この展開において、 r の奇数次の項、たとえば $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とか $r^3 = (x^2 + y^2)^{3/2}$ などを含めてはなりません。これらは軸対称関数であるのは確かですが、 x と y に関して整数次ではないので、べき展開の要素とはなりません。すなわち、 r の奇数次の項は (11) の展開項の一つになるのではなく、(11) のかたちに展開されるべき対象となります。(たとえば、 $f(x)$ という関数を $x = 0$ のまわりでテイラー展開するときに、 $x^{1/2}$ とか $x^{3/2}$ という項は必要ありません。これらを含めてしまうと展開項の独立性がくずれ、展開係数が一意に定まりません。)

さて、(11) の最低次の項は $r = 0$ のときの Φ であり、これは光軸上の加速ポテンシャルの値です。そこで、これを軸上ポテンシャル分布 (axial potential distribution) とよんで、 $\phi(z)$ と書くことにします。よって、(11) における $n = 0$ の項は $a_0(z) = \phi(z)$ となります。光軸に十分近い領域のみを考えるなら、 $\Phi(r, z)$ は $\phi(z)$ で置きかえても十分よい近似となるでしょう。

(11) の高次の項も考えておきましょう。 Φ が軸対称という条件だけみたせばよいのであれば、高次の $a_n(z)$ は任意です。しかし、 Φ は自由空間でラプラス

方程式をみたすべきなので、これを考慮するなら高次項になんらかの条件が課されるはずですが、

ラプラス方程式は (9) で与えられましたが、いまは軸対称系を考えているので、(9) を円柱座標で表わすと次式のようになります。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (12)$$

この式から、もし $\partial^2 \Phi / \partial z^2 \neq 0$ であれば、これを打ち消すように r 方向にも変化しなければなりません。よって、先に示した $\Phi(r, z) = \phi(z)$ という近似は、 z 方向にしか変化しないので、 $\phi''(z) = 0$ の場合をのぞいてラプラス方程式をみたくしません。 $(\phi''(z) = 0)$ となるのは、 $\phi(z)$ が定数か z の 1 次関数の場合、つまり自由空間か z 方向の一様電場のときです。

すなわち、ラプラス方程式をみたすという制約によって、 z 方向の変化が与えられれば、 r 方向の変化のしかたもある程度決められてしまうわけです。そこで、この制約を (11) の展開式に課してみましよう。まず (11) の最初の 2 項だけをとって、

$$\Phi(r, z) = \phi(z) + a_1(z)r^2 \quad (13)$$

とおいてみて、 $a_1(z)$ をうまく選んで (12) をみたすようにできるかどうか調べてみます。(13) を (12) に代入すれば次の条件式が得られます。

$$\phi''(z) + 4a_1(z) + a_1''(z)r^2 = 0 \quad (14)$$

この条件はすべての r に関してなりたつべきですが、任意の $\phi(z)$ にたいして、上式の r の 0 次の項と 2 次の項を同時に 0 にするように $a_1(z)$ を決めることはできません。しかし、いまは z 軸に十分近い領域を考えているので、2 次の項を無視して、0 次項が消えることを優先します。これによって、

$$a_1(z) = -\frac{1}{4}\phi''(z) \quad (15)$$

が得られます。よって (13) は、

$$\Phi(r, z) = \phi(z) - \frac{1}{4}\phi''(z)r^2 \quad (16)$$

となります。これはラプラス方程式を 0 次までみたす近似であるわけです。

この手順は、さらに高次まで続けることができます。次の項の $a_2(z)$ を求めるには、

$$\Phi(r, z) = \phi(z) - \frac{1}{4}\phi''(z)r^2 + a_2(z)r^4 \quad (17)$$

とおいて (12) に代入すれば、

$$\left(16a_2(z) - \frac{1}{4}\phi^{(4)}(z) \right) r^2 + a_2''(z)r^4 = 0 \quad (18)$$

となり、こんどは r の 2 次まで打ち消すことができ、

$$a_2(z) = \frac{1}{64}\phi^{(4)}(z) \quad (19)$$

と決まります。

この手順を繰り返していけば、最終的に次式が得られます。

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} r^{2n} \phi^{(2n)}(z) \\ &= \phi(z) - \frac{1}{4}r^2 \phi''(z) + \frac{1}{64}r^4 \phi^{(4)}(z) \\ &\quad - \frac{1}{2304}r^6 \phi^{(6)}(z) + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

この展開の一般項を証明するには、最初に (11) を (12) に代入してしまつて、 $a_n(z)$ についての漸化式を導くのがよいでしょう。

上式のように、ラプラス方程式をみたすという制約によって、高次の展開係数はすべて $\phi(z)$ だけで決まってしまう。そこで、 $\phi(z)$ とその微分を数値的に決定できる状況でさえあれば、上の展開式を想定して理論を築いていくことが可能となります。あらかじめ Φ の具体的な表式を与えることなく、近軸理論のために必要な Φ のべき展開式を与えることができたわけです。

なお、上の導出過程からわかるように、展開 (20) を途中で打ち切った場合は厳密にはラプラス方程式をみたさなくなります。この事実は、収差を議論する際に重要になります。

4.3.3 軌道方程式のべき展開

加速ポテンシャルのべき展開式 (20) が得られたので、あとはこれを軌道方程式 (7) に代入すればよいわけです。1 次軌道方程式を得るために、 x, y, x', y' についての 1 次の項のみを残し、2 次以上の項は落とします。よって、まず (7) に含まれる $1 + x'^2 + y'^2$ の因子は 1 で置きかえることができます。

注意すべきことは、(20) の展開における 2 次以上の項を最初に落としてしまつてはいけないということです。(7) には $\partial \Phi / \partial x$ と $\partial \Phi / \partial y$ が含まれているので、(20) の 2 次の項は、軌道方程式の 1 次の項をつくり出す。そこで (20) はあらかじめ 2 次まで残して、

$$\Phi(x, y, z) = \phi(z) - \frac{1}{4}\phi''(z)(x^2 + y^2) \quad (21)$$

として (20) に代入します。

(7) の分母の Φ は、次のように処理します。(21) から、

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\phi} \left[1 - \frac{\phi''}{4\phi} (x^2 + y^2) \right]^{-1} \quad (22)$$

と変形して、 $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \dots$ というテイラー展開式を適用します。これによって、

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\phi} \left(1 + \frac{\phi''}{4\phi} (x^2 + y^2) - \dots \right) \quad (23)$$

というべき展開式が得られます。よって、1 次までの近似では $1/\Phi$ は $1/\phi$ で置きかえてよいことがわかります。

(7) の 1 次の項だけをのこした結果は、最終的に次のようになります。

$$\begin{cases} x'' + \frac{\phi'(z)}{2\phi(z)} x' + \frac{\phi''(z)}{4\phi(z)} x = 0 \\ y'' + \frac{\phi'(z)}{2\phi(z)} y' + \frac{\phi''(z)}{4\phi(z)} y = 0 \end{cases} \quad (24)$$

これが目標としていた、静電レンズにたいしての 1 次軌道方程式です。この解を 1 次軌道とよびます。

この方程式は、軸上ポテンシャル分布 $\phi(z)$ とその 2 階微分が与えられれば数値的に解くことができます。ひと昔 (十年) まえなら、 $\phi(z)$ を適当な関数で近似して、1 次軌道を解析的に求めるところです。しかし、現在では PC によって数値計算が容易に行えるので、解析的な扱いはあまりはやりません。

さて、(24) は §4.2 で予告したかたちになっています。(24) の各式の第 3 項は、入射高 x, y に比例する屈折作用、すなわち通常のレンズ作用を表わす項です。そしてさらに、軌道の傾き x', y' に比例する作用を表わす第 2 項が存在します。この二種類の項のはたらきを理解することが重要です。

しかしその議論をぬきにして、(24) が線形の微分方程式であることだけをもちいて、多くの 1 次軌道の性質が導かれます。まずこれに関して §4.4 で述べたのち、各項の物理的解釈について §4.5 で詳しい議論を行います。

4.4 1 次軌道の性質

4.4.1 近軸特性

静電レンズの 1 次軌道方程式 (24) は、 x と y に関して独立になっています。これは一般のスキュー軌道 (z 軸を含む平面上にのらない軌道) であっても、そ

の x 成分と y 成分を別々に計算できるということです。そこで以下では x 成分のみを考え、次のかたちの微分方程式の解の性質を述べます。

$$x'' + a(z)x' + b(z)x = 0 \quad (25)$$

微分方程式論からの分類でいうと、(25) は 2 階の「線形斉次」常微分方程式です。線形というのは、未知関数 $x(z)$ とその微分に関して 1 次の項のみからなるということです。もし 2 次以上の項を含めば非線形となります。また、右辺が 0 であれば斉次、右辺になにか z の関数があるときは非斉次です。

さて、このタイプの方程式においては、いわゆる重ね合わせの原理が成り立ちます。すなわち、任意の解の定数倍も解になり、また 2 つ以上の解の線形結合もまた解になります。たとえば (25) が $x_1(z)$ と $x_2(z)$ という解をもつとすると、 $c_1x_1(z)$, $c_1x_1(z) + c_2x_2(z)$ (c_1, c_2 はある定数) のような関数も解となります。

また別の性質として、ある $z = z_0$ において初期条件 $x_0 = x(z_0)$, $x'_0 = x'(z_0)$ を与えると、解は一意に決まります。初期条件として $(x_0, x'_0) = (1, 0)$ をみたす解を $g(z)$, $(x_0, x'_0) = (0, 1)$ をみたす解を $h(z)$ とすれば、任意の初期条件 (x_0, x'_0) にたいしての解は、

$$x(z) = x_0g(z) + x'_0h(z) \quad (26)$$

として与えられます。なぜなら、(26) は (25) の二つの解の線形結合なので (25) の解であり、また確かに初期条件をみたしています。ある初期条件をみたす解は一意に決まるのでしたから、(26) は初期条件 (x_0, x'_0) をもつ唯一の解です。

(25) の任意の解は、上の二つの解 $g(z)$, $h(z)$ の線形結合で尽くされます。(26) は (25) の一般解とよばれ、一般解を線形結合としてあたえる $g(z)$, $h(z)$ は基本解 (fundamental solution) とよばれます。一般に、互いに他の定数倍でないような二つの解は基本解として採用できます。しかし、ここでの目的のためには上のような $g(z)$, $h(z)$ に選ぶのが一番便利です。

Fig.3 は、簡単な静電レンズにおける $g(z)$ と $h(z)$ の計算例です。この図のレンズは第 1 章で示したのと同じタイプのもので、加速型イマージョンレンズ (acceleration-type immersion lens) とよばれます。光学では、油浸レンズのように物面と像面で屈折率が異なるようにしたものがイマージョンレンズです。電子光学においては、静電ポテンシャルが屈折率に対応するのでしたから、レンズの入口と出口で電位が異なる場合にイマージョンレンズとよばれます。

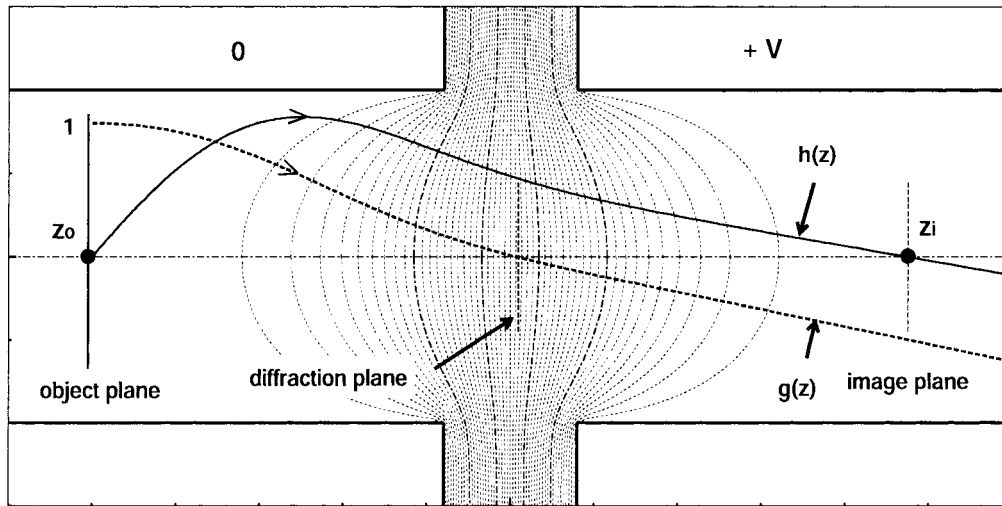


Fig. 3: Fundamental solutions of the first-order trajectory equation, $g(z)$ and $h(z)$, in an acceleration-type immersion lens.

このタイプのレンズを通過する際には、電子の運動エネルギーが変化することになりますが、この図は加速される場合なので加速型イマージョンレンズといいます。この図では、加速率は入射エネルギーの120倍です。また、図では静電ポテンシャルの等高線も描かれています。電場ベクトルの方向は各点でポテンシャルの等高線に直行し、電場が電子におよぼす力の方向を示します。このような電場の分布がレンズとしてどのように作用するかに関しては、§4.5で詳しく考察します。

さて、(25)の一般解が(26)で与えられることをもちいると、静電レンズ中の1次軌道の性質を導くことができます。近軸特性に関しての用語はすでに第1章で導入しましたが、ここで改めて定義しておきます。

まず、初期条件を与える面 $z = z_0$ を物面と考えます。すると、 x_0 は物面において電子が出る位置、 x'_0 はその傾きです。出射角をラジアンで測って α_0 とすれば $x'_0 = \tan \alpha_0$ ですが、 α_0 が小さければ $\tan \alpha_0 \simeq \alpha_0$ なので、 x'_0 と α_0 を区別しないでもちいても支障ありません。

物面から $h(z)$ が出発して再び z 軸と交わる面が像面 $z = z_i$ として定義されます。 $h(z)$ が光軸のまわりを振動しながら進むような場合は、そのような面が複数存在することになりますが、それらはすべて像面となります。 $h(z)$ を定数倍したものはすべて解であるということから、光軸上の一点から出た軌道は

すべて同一点に集束することになります。これは、球面収差が存在しないことを意味します。

像面における $g(z)$ の値を倍率とよんで M と書きます。 $M = g(z_i)$ には通常符号まで含ませて、図のように倒立像になるときは負の量です。また、 $g(z)$ が z 軸と交わる面 $z = z_d$ は回折面、あるいは焦点面とよばれます。

ここで(26)において、 x_0 の値は固定して、 x'_0 だけを変化させてみましょう。これは、物面でのある一点からいろいろな角度で電子を射出させることを意味します。この様子を Fig.4(a) に示します。このとき、(26)で $z = z_i$ とおいてみると、 $h(z_i) = 0$ であることと x_0 が定数であることから、 x'_0 によらず同一の点 Mx_0 に到達することがわかります。これは、 x_0 に置いた点光源の像が収差なしに一点に結像される、つまり球面収差だけでなく軸外収差も存在しないということです。

今度は、(26)において x'_0 の値は固定して、 x_0 だけを変化させます。これは、物面においていろいろな位置から同一の角度で電子を出す場合で、この様子が Fig.4(b) です。このとき(26)で $z = z_d$ とおいてみると、 $g(z_d) = 0$ であることと x'_0 が定数であることから、 x_0 によらず同一の点 $x'_0 h(z_d)$ に到達します。このことから、回折面においては、物面の出射角ごとに決まった点に集束することになります。

このように、1次軌道はまったく収差を含まないこ

とになります。別の言い方をすると、厳密な軌道方程式から収差の寄与を取り去ったものが1次軌道です。近軸領域に限定するならば、どんなレンズであっても収差のない理想的なものはたらしをします。

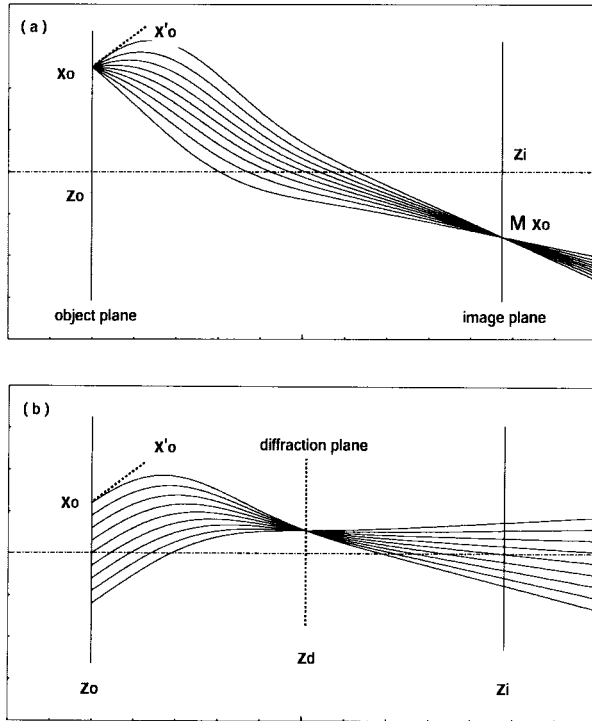


Fig. 4: (a) First-order trajectories emitted from an off-axis object. (b) First-order trajectories with the same inclination at the object plane.

さて、1次軌道方程式は光軸の近くでしか成り立たないわけです。たとえば、 $h(z)$ は任意の定数をかけても解ですが、実際には非常に小さい定数をかけて、軸から大きく離れないようにして描いた軌道だけが意味があるはず。そこで、Fig.3 や Fig.4 のように、光軸から大きく離れた場所で1次軌道を描くのは抵抗があるかも知れません。

しかしながら、1次軌道は「収差が完全に除かれた場合に実現される軌道」として見ることもできます。そのように解釈するならば、どんなに軸外で描いたとしても不自然ではありません。(ただし、光学系の収差を除くことが可能かどうか、あるいは、可能であったときの軌道が1次軌道に一致するかどうかは別問題です。) この節で示した図のように、近軸という条件を無視して、任意の初期条件にたいして1次軌道を描くことは普通に行われます。この事情から、本稿では1次軌道方程式の解を近軸軌道とよぶのはなるべく避けています。

4.4.2 転送行列とエミッタンス図

静電レンズの近軸特性に関して、前節で述べた内容をさらに発展させます。まず、(26) の両辺を z で微分して、(26) とならべて書けば、

$$\begin{cases} x(z) = x_o g(z) + x'_o h(z) \\ x'(z) = x_o g'(z) + x'_o h'(z) \end{cases} \quad (27)$$

となります。これらは行列で表わすことができ、

$$\begin{pmatrix} x(z) \\ x'(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(z) & h(z) \\ g'(z) & h'(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ x'_o \end{pmatrix} \quad (28)$$

のようになります。

上式の右辺の行列を $T(z)$ と書いて、転送行列 (transfer matrix) とよびます。(日本語でも「トランスフォーマトリックス」というほうが多いかもしれません。) この行列によって、 $z = z_o$ における初期条件を表わすベクトル (x_o, x'_o) が、一般の z における $(x(z), x'(z))$ に変換されます。なお、ベクトルを縦に書いたり横に書いたりしますが、ここでは区別はありません。また、転送行列は z_o から z への変換として $T(z_o, z)$ のように表わすほうがよいのですが、 z_o は固定して考えて省略することとします。

上式のように一つの行列によって決まる変換は、1次変換あるいは線型変換とよべます。1次変換は、比例関係を多次元に一般化した関係であり、原点はかならず原点に写されるということが一つの重要な性質です。ここでの原点とは $(x_o, x'_o) = (0, 0)$ であり、光軸に沿った軌道は変換をうけずにそのまま光軸上を進むことを意味します。

さて、§4.2 では光学レンズによる屈折作用を表わす式 (1) を示しましたが、これは転送行列の形式で表わすことができます。レンズ入射面での条件を (x_1, x'_1) 、出射面での条件を (x_2, x'_2) とすれば、これらの関係は次式のようにになります。

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

これは同一の z 座標における変換なので、 x 座標は不変であり、軌道の傾きだけが変化します。

また、 z 軸に沿って長さ L の自由空間 (ドリフト空間ともいいます) があるとすると、その入口の (x_1, x'_1) と出口の (x_2, x'_2) との関係は、下のように与えられます。

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

ドリフト空間においては、レンズの場合とは逆に、軌道の傾きはそのまま座標だけが変化します。

いくつかの光学レンズ、あるいはそれと等価な電子レンズが並んでいる場合に、レンズ公式 (2) をもちいて軌道を追うのは大変です。そのかわりに、(29) と (30) の変換を合成して、レンズとドリフト空間が並んでいる順番に対応する行列を次々にかけていけば、全体としての転送行列が求まります。計算機で軌道をグラフィック表示する際にも、レンズ面ごとに転送行列による変換を行なって、軌道の傾きの変化を追っていくのが簡単です。

さて、(28) の関係は、 xx' 平面を考えて、その上で図示することができます。この平面上に任意の一点 (x_o, x'_o) をとり、転送行列 $T(z)$ を z ごとに掛けていけば、 (x_o, x'_o) を始点とするひとつの軌道 $(x(z), x'(z))$ が得られます。

そこで、初期条件を表わす点 (x_o, x'_o) の集合を考えて、 xx' 平面上にある図形をつくれば、その図形に含まれる点は $T(z)$ によって変換されて、 z ごとに別の図形に変換されることになります。このような図形を **エミッタンス図 (emittance diagram)** といいます。そして、それが囲む面積がエミッタンスとよべれます。

xx' 平面は決まったよびかたはありませんが、力学において位置と速度で張られる空間を状態空間というのにならって、状態平面とよぶのが適当でしょう。(「相平面」といういいかたは、別の意味にとっておきます。)

エミッタンス図は、電子ビームの状態を指定するのに適したものです。ふつう素性のよいビームといえは、まず空間的に光軸付近に集中していて、光軸となす角度もなるべく小さい、つまり方向のそろったものです。状態平面上でいうなら、エミッタンス図がなるべく原点付近に集中していて、面積の小さい状態であることです。いいかえれば、近軸領域だけを通るビームということです。(近軸領域とは空間内のどこかではなく、状態空間において考えるべきものです。) 電子分光において、エネルギーアナライザにとって性質の良い入射ビームの条件とはこのようなものです。

重要なことは、転送行列 $T(z)$ は単に一つ一つの軌道を追うだけのものではなく、集団としての複数の軌道の振る舞いを決定する概念であるということです。なぜなら、エミッタンス図を z_o から z に変換する行列は、エミッタンス図に含まれる点ごとに別々なのではなく、共通の一個の行列です。すべての点が共通の規則にしたがって変換され、その変換を指定するものがただ一つの行列であるということです。 $T(z)$ が単

独の軌道にたいしての概念ではないことは、 $T(z)$ の要素が $g(z)$ と $h(z)$ という二つの軌道を同時に含んでいることに現れています。

このことから予想されるように、1 次軌道方程式によって軌道を個別に追うのではなく、 $T(z)$ という 1 次変換がもつ性質を考えることで、はじめて見えてくる特性というものがあります。1 次変換 $T(z)$ の性質として最も重要なのは、エミッタンス図の面積をどう変えていくかということです。

1 次変換 $T(z)$ による面積拡大率は、行列 $T(z)$ の行列式、すなわち、

$$W(z) = g(z)h'(z) - g'(z)h(z) \quad (31)$$

で与えられます。 $T(z)$ の要素が z の関数なので、行列式もまた z の関数となります。微分方程式論では、 $W(z)$ は基本解 $g(z)$, $h(z)$ の **ロンスキアン (Wronskian)** とよべれます。上式で $z = z_o$ とおけば $W(z_o) = 1$ となりますが、面積拡大率という意味を考えれば当然そうでなければなりません。

(31) においては $W(z)$ が $g(z)$ と $h(z)$ で表されていますが、これらの軌道は 1 次軌道方程式を解いてはじめてわかるものです。もっと直接的に、レンズがつくる軸上ポテンシャル分布 $\phi(z)$ と $W(z)$ の関係を導いてみましょう。まず (31) の両辺を z で微分して、 $g(z)$ と $h(z)$ が (25) をみたすことをもちいると、 $W(z)$ がみたすべきつぎの微分方程式が得られます。

$$W'(z) = -a(z)W(z) \quad (32)$$

この解は、

$$W(z) = W(z_o) e^{-\int_{z_o}^z a(z) dz} \quad (33)$$

となります。これは、微分方程式 (25) のロンスキアンを与える **リュービルの公式 (Liouville's formula)** とよべれるものです。(アーベルの公式とよんでいる教科書もあります。) これに $W(z_o) = 1$ をもちいて、さらに $a(z)$ の具体形 $\phi'/(2\phi)$ を入れれば、最終的に次式が得られます。

$$W(z) = \sqrt{\frac{\phi_o}{\phi(z)}} \quad (34)$$

ここで、 $\phi_o = \phi(z_o)$ においてあります。(34) によって、 xx' 平面における面積がどのように変化していくかが与えられます。

さて、エミッタンス図が原点を中心に狭い範囲に集中している状態が望ましいわけですが、通常はその

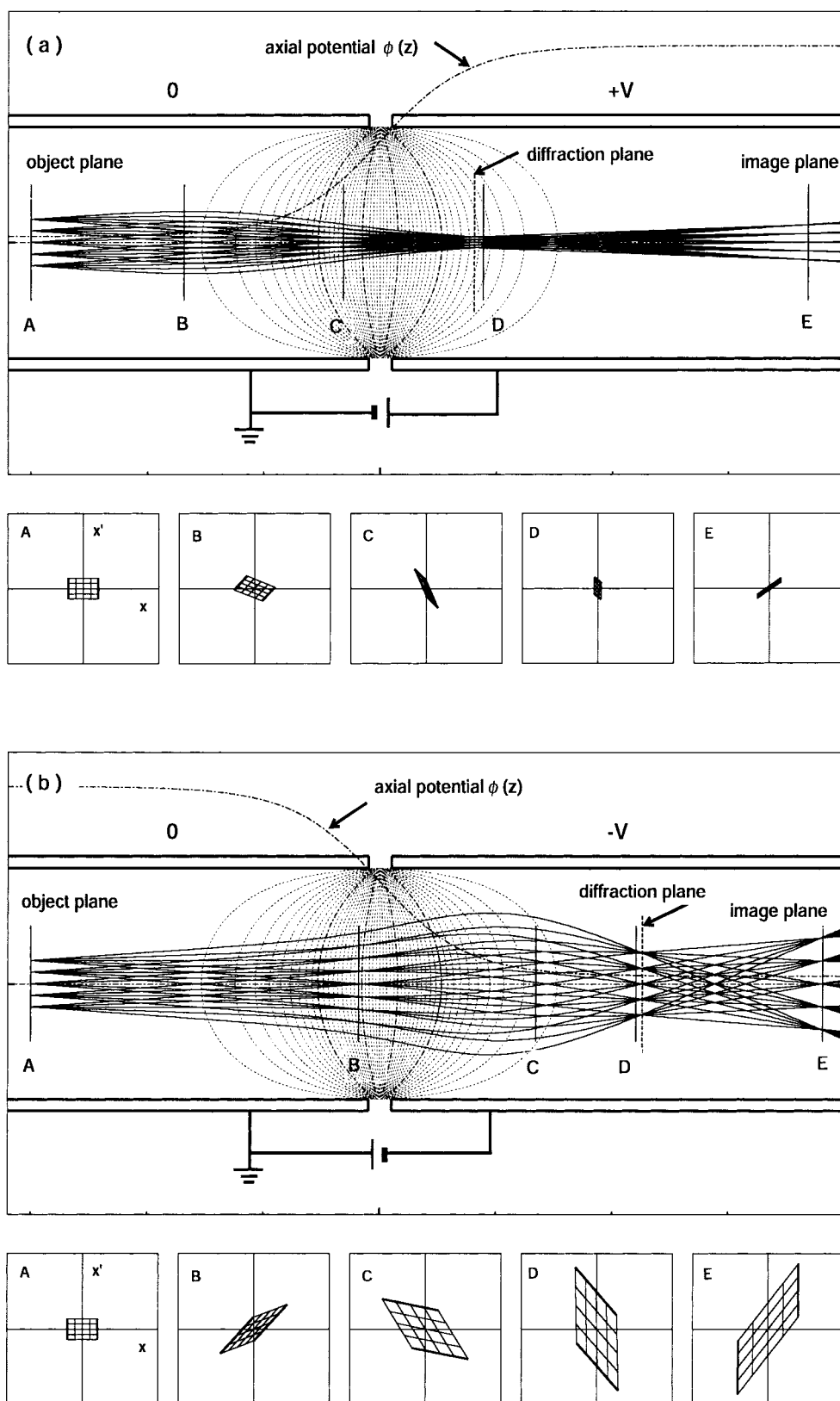


Fig. 5: Progressive change of emittance diagrams during beam propagation through electrostatic lenses: (a) acceleration-type immersion lens; (b) deceleration-type immersion lens.

ようなビームが最初から得られるのではありません。電子レンズをうまく組み合わせて、だんだん理想的な状態に近づけていきたいわけです。しかし、このような光学系の実現に制約を課すのが、上で示した面積変化の法則です。

(34)によれば、 z 依存性は $W(z) \propto \phi^{-1/2}(z)$ です。 $\phi(z)$ は、光軸に沿って電子が進むときの運動エネルギーに対応します。したがって、電子が加速されて $\phi(z)$ が大きくなれば面積は縮小され、逆に減速されれば面積は拡大します。もし z_0 と z の二つの面でポテンシャルが同一であれば、その途中でどんな静電レンズ系をおいても、エミッタンスを変えることはできません。

エミッタンスを小さくしたければ、ビームを加速するしかありません。しかしながら、ビームの加速自体が目的である場合は別として、ビームの性質をよくするために加速を行なうということは、実際上の困難を伴います。たとえば、加速を行ったあとの光学系がアース電位でなくなると不都合ですし、高電圧をもちいると放電の苦勞もあります。

とくに電子分光系においては、最終的にエネルギーアナライザにビームを入射させる際には、電子を加速するのではなく、逆に減速させる方が望まれます。これは、アナライザのエネルギー分散が減速率に比例して増加するからです。したがって、エミッタンスにたいしての制約はわれわれにとって深刻です。ビームを減速すればするほど、エミッタンス図は必然的にひろがってしまいます。

計算例を示します。まず Fig.5(a) は、加速型イマージョンレンズにおけるエミッタンス図の変化の様子を示します。このレンズにおける加速率は32倍です。加速にしたがってエミッタンス図が縮小して、性質のよいビームに変換されていきます。Fig.5(b) は減速型イマージョンレンズの場合であり、もとのエネルギーの0.04倍に減速されています。減速によってエミッタンス図が広がっていく様子がわかります。なお、二つの図で電子ビームの初期条件は同一です。

エミッタンスがみたすべき法則 (34) は、面積がどう変わるかを述べているだけで、エミッタンス図の形状についてはなんの制約もあたえません。われわれにできることは、(34)の条件の範囲内で、なるべく望ましいエミッタンス図になるようにビームを整形することです。これは、ビームの受け手との「整合をとる」作業です。電子分光におけるいくつかの例は、後の章で詳しく述べることにします。

4.5 静電レンズのはたらき

4.5.1 1次軌道方程式の意味

近軸領域の軌道が線形の微分方程式をみたすということ、そしてその事実から導かれる静電レンズの性質を前節までに述べてきました。実用上はそれで十分ですが、静電レンズのはたらきを真に理解するために、もう少しつつこんだ議論が必要です。ここでは1次軌道方程式、すなわち、

$$x'' + \frac{\phi'(z)}{2\phi(z)}x' + \frac{\phi''(z)}{4\phi(z)}x = 0 \quad (35)$$

の物理的な意味を考えてみます。

まず (35) から認識すべきことは、1次軌道は軸上ポテンシャル分布 $\phi(z)$ だけで決定されるということです。加速ポテンシャル $\Phi(r, z)$ がラプラス方程式をみたすということから、光軸上での値 $\phi(z)$ がわかれば、軸外の値も決まってしまうのでした。 $\phi(z)$ は、電子が光軸に沿って運動する際の運動エネルギーの増減を表わす量です。よって静電レンズとは、電子を加速あるいは減速させて、その過程においてなんらかのレンズ作用を与えるものであると言えます。

特別な場合として、 $\phi(z)$ が定数であれば、 $\phi(z)$ の高階微分はすべて0、よって (20) の展開式から空間全体が等ポテンシャルとなります。(35) は $x'' = 0$ となって、電子軌道は直線になります。つまりドリフト空間の場合です。

$\phi(z)$ が z の1次式の場合は、 $\phi'(z)$ は定数でそれ以上の高階微分は0、よって (20) から $\Phi(r, z) = \phi(z)$ となります。これは、空間全体で一樣な z 軸方向の電場分布に対応します。 $\phi'(z) > 0$ なら電子が加速されるということですが、電子の電荷は負ですから、このときの電場は $E_z = -\phi'(z) < 0$ 、つまり z の負の方向を向いています。

$\phi(z)$ が1次式でない一般の場合は、 $\phi''(z)$ が値を持ち、一樣でない電場分布となります。この場合、一般には $\phi'(z)$ も0ではありません。例外的には、 $\phi''(z) \neq 0$ かつ $\phi'(z) = 0$ となることがあり、これは $\phi(z)$ が極値をとるような一点 z においてのみ起きます。しかしその例外を除くと、ドリフト空間でない限り $\phi'(z)$ はいつでも値をもつと言えます。

このように、通常は (35) の $\phi'(z)$ の項はつねに存在して、 $\phi''(z)$ の項は一樣場からずれた場合にのみ存在します。そこで $\phi'(z)$ は、「一樣場の作用の分布」を表わす関数と見なすことができます。 $\phi'(z)$ が定数でない限り一樣場ではないので、この言い方は正確で

はないわけですが、(35)の第2項と第3項の寄与を分離して考えやすくなります。つまり、静電レンズの作用を z ごとに局所的に考えて、第2項は一樣場としての作用、第3項はそれからのずれによる作用として扱うわけです。

なお、(35)の第2項と第3項の分母には $\phi(z)$ がありますが、これは $\phi(z)$ の小さな場所ほど、すなわち電子が低速で走っている場所ほど、各項の作用が強くなるということです。($\phi(z)$ はいつでも正の量です。)

さて、力学において(35)のかたちの微分方程式が現れる場合として、減衰のある振動子の問題があります。バネにつながれたおもりが振動をしていて、その振幅が摩擦によって徐々に減衰していく状況を考えます。このときの振幅 x がみたす運動方程式は次のかたちになります。

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0 \quad (36)$$

ここで、 m は振動するおもりの質量、 k はバネ定数です。 γ の項は、速度に比例した摩擦力が働くことを表します。これは多くの場合、おもりの速度が小さければよい近似となります。 γ は減衰係数(damping coefficient)とよばれます。もし $\gamma = 0$ であれば、上式は $m\ddot{x} = -kx$ となり、 x 座標に比例して原点に引き戻す引力のもとでの運動、すなわち調和振動となります。

さて、この方程式と(35)を見比べてみましょう。もちろん、(36)における時間微分は z についての微分に置きかえて考えます。静電レンズにおいて $a(z) = \phi'/(2\phi)$ と $b(z) = \phi''/(4\phi)$ は独立ではありませんが、最初は別々に扱ってみます。

まず、バネ定数 k に対応するのは $b(z)$ です。この項だけが存在すれば、軌道方程式は $x'' = -b(z)x$ となり、これは§4.2で述べたように、理想的なレンズ作用を表わす方程式です。振り子の運動を考えると、 $k > 0$ の場合しか考えませんが、 $b(z)$ は正にも負にもなれます。 $\phi'' > 0$ のときは、 $k > 0$ に対応して原点(すなわち z 軸)に向かう引力、 $\phi'' < 0$ なら逆に斥力です。すなわち、 $\phi'' > 0$ の領域は凸レンズ、 $\phi'' < 0$ の領域は凹レンズとして働きます。 $b(z)$ が一定符号をもち、かつ値をもつ領域が局在していれば、焦点距離 f が(5)で与えられる薄肉レンズで置きかえられます。その作用が凸レンズなら $f > 0$ 、凹レンズなら $f < 0$ です。

つぎに、減衰係数 γ に対応する $a(z)$ の項を考えます。 $a(z)$ は z 軸方向の一樣な電場成分に対応するものでした。振り子の場合、摩擦力はつねに運動を邪魔す

る方向に働き、よっていつも $\gamma > 0$ ですが、 $a(z)$ は $b(z)$ と同様に正にも負にもなります。 $\phi' > 0$ のときは摩擦力に対応しますが、 $\phi' < 0$ であると、逆に速度に比例して加速させる力ということになります。

$\phi' > 0$ のときに摩擦力に対応するといいましたが、静電レンズにおいて ϕ は光軸に沿っての加速ポテンシャルですから、 $\phi' > 0$ の領域では電子が加速され、 $\phi' < 0$ では減速です。したがって、上に述べた対応と逆になっているように見えます。

ここで注意すべきことは、(35)においてはすでに時間は消去されていて、したがって電子の加速とか減速という概念は本来存在していないということです。たとえば、(36)においておもりが減速されるというのは $\dot{x}$ が t とともに減少するという意味ですが、(35)においてこれに対応するのは、 x' が z とともに減少するということです。つまり z 軸からの傾きが減るということで、これは電子が減速されるということとは違って、実はその逆です。

一樣場の作用を絵に描いてみると、Fig.6のようになります。図の(a)は一樣加速場の場合です。加速場の中では、電子はつねに光軸方向に向きを変えようとして、傾き0の状態に近づいていきます。振り子の場合にこれに対応するのは、バネがなくて摩擦の作用のみがあるときに、運動がだんだん遅くなって静止してしまう状況です。図の(b)は減速場の場合ですが、このときは逆に傾きが増加していきます。このように、加速場中の軌道は摩擦によって運動が減衰する場合、減速場中の軌道は負の摩擦によって運動が暴走していく場合に、それぞれ対応しています。

以上のように、静電レンズにおいては、本来のレンズ作用だけではなく、一樣場の作用が同時に存在しています。レンズ作用は振り子のバネのようにはたらか、一樣場は摩擦に対応します。一樣場の作用は光学系の構成要素として異質なものであり、これが静電レンズのはたらかをわかりにくくしています。次節では、一樣場の作用を詳しく調べることにします。

4.5.2 一樣な加減速場の作用

一樣場の作用は、凸レンズや凹レンズと決定的に異なる性質をもっています。まず、光軸という特別な軸が存在しません。前節のFig.6からわかるように、光軸からでた軌道と軸外から出た軌道は差別がありません。さらに、凹凸レンズとは異なり、一樣場の作用は集束でも発散でもありません。たとえばFig.6(a)において、軸外の一点から正の傾きで出た軌道は光軸

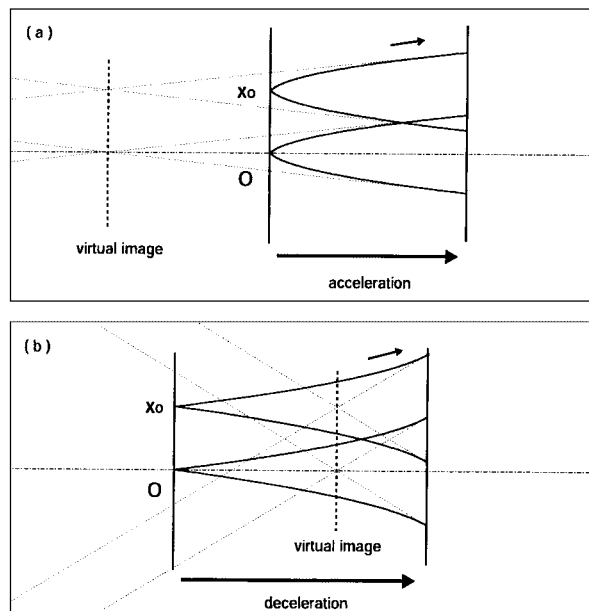


Fig. 6: Action of uniform electric fields to electron trajectories: (a) acceleration field; (b) deceleration field.

方向に引き寄せられ、その意味では集束作用をうけていますが、同じ軸外点から負の傾きで出た軌道は、光軸から遠ざかる方向に曲げられているので発散作用です。

この記述からわかるように、集束か発散かという議論自体が、光軸を特別扱いしています。一樣場にたいしては、そのような集束、発散の概念は意味がなくなります。もし強いて考えたければ、それは軌道ごとに判断すべきことです。

別の相違点として、一樣場によって実像がつけられることはありません。一樣場の中では、一点から発散していく軌道が、ふたたび集束に転じるような状況がありえないのは明らかです。一樣場はいつでも倍率1の虚像を生成します。倍率が1であることは、すべての物点が平等であり、同じ作用をうけるということからの帰結です。

さて、一樣場は光学ではどんな系に対応するのでしょうか？一般に、電子光学系における静電ポテンシャル分布は、光学における屈折率分布に対応するのです。z 軸方向の加減速場に対応するのは、 $n = n(z)$ というかたちの屈折率分布です。うるさく言うなら、 $n(z)$ が1次式でないかぎり、対応する静電ポテンシャルはラプラス方程式をみたしません。しかし、光学ではそのような制約がないので、一般に $n = n(z)$ という屈折率分布が可能です。簡単な例として、Fig.7のように、光軸に垂直においた板ガラスを考えるこ

とができます。図のように、板ガラスの手前に倍率1の虚像が形成されます。

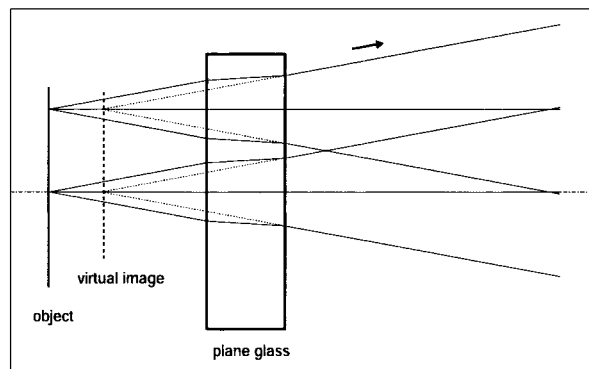


Fig. 7: Illustrating the optical action of a plate glass.

板ガラスのような作用が、通常のレンズ作用と隣り合わせで置かれた場合、なにが起きるでしょうか。たとえば、物面から出た光がまず板ガラスを通り、そのあと通常のレンズを通るとしましょう。この場合、板ガラスは物体の虚像をどこかに作り、その虚像はレンズにとっての物体となります。よって、板ガラスは単に物体を移動させるはたらきだけであり、レンズの結像作用をこわすことはありません。すなわち、板ガラスとレンズが組み合わされた系は、全体として一つの通常のレンズとしてはたらくということです。

静電レンズにおいても上の系と同様に、本来のレンズ作用と一樣場の作用が共存しています。そして、光軸というものが特別な意味をもち、集束か発散かの明確な区別があるのは、本来のレンズ作用のほうだけです。しかし、どんな場合でも全体として見れば通常のレンズとしてはたらくので、二つの異質の作用が混在しているという事実になかなか気づきません。

なお、板ガラスを、光学レンズの屈折面の曲率半径が無限大になった特別な場合と見なすことができます。しかし、凹凸レンズと板ガラスでは上で述べたような本質的な違いが存在するので、別ものとして扱うのがよいでしょう。

さて、一樣場のはたらきを定量的に調べてみます。Fig.8のように、z 軸に沿った長さ L の領域に一樣な電場を形成するとします。一樣場の両端の電位差を U とします。これは符号まで含んでいて、 $U > 0$ のときが加速場、 $U < 0$ のときが減速場です。図では加速場の場合を示しています。

この電場の入り口 $z = 0$ から出口 $z = L$ への転送行列を求めてみます。一樣場中の運動は重力場中の放

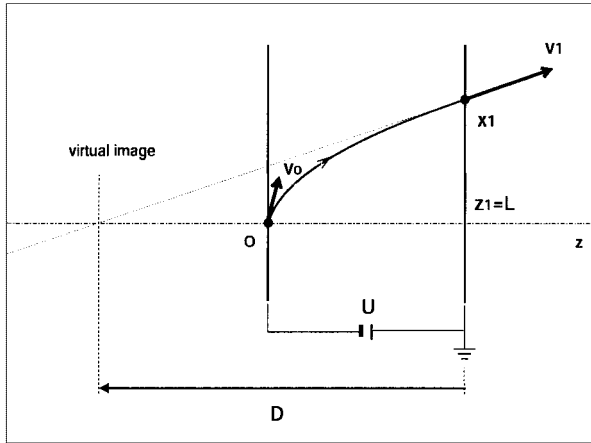


Fig. 8: Electron trajectory in a uniform acceleration field.

物運動と同じですから、1次軌道方程式をもちいるより、時間をパラメタとした運動方程式に戻るほうが容易です。

まず、電子の運動方程式は $m\ddot{z} = eU/L$, $m\ddot{x} = 0$ となります。ここで、電子の初期エネルギーを eu_0 とし、

$$\sigma_o = \frac{u_o}{U} \quad (37)$$

というパラメタを定義しておきます。加速の場合、加速電圧 U が大きいほど σ_o は小さくなり、 u_o にたいして U が十分大きければ $\sigma_o \rightarrow 0$ です。また減速の場合は一般に $\sigma_o \leq -1$ であり、 $z = L$ で電子が引き返す場合が $\sigma_o = -1$ です。これより減速の強い場合は考えません。

さて、初期エネルギーが eu_0 のときに、初速は $v_o = \sqrt{2eu_o/m}$ となります。よって出射角を α_o とすれば、初速の z 成分と x 成分は次のようになります。

$$v_{zo} = \sqrt{\frac{2eu_o}{m}} \cos \alpha_o, \quad v_{xo} = \sqrt{\frac{2eu_o}{m}} \sin \alpha_o \quad (38)$$

この初期条件のもとで、運動方程式の解は次のようになります。

$$\begin{cases} z(t) = v_{zo}t + \frac{1}{2} \frac{eU}{mL} t^2 \\ x(t) = x_o + v_{xo}t \end{cases} \quad (39)$$

この第1式を t で解いて第2式に入れることで t が消去されて、 z の関数としての軌道が次のように求められます。

$$x(z) = 2L x'_o \left\{ -\kappa_o \pm \sqrt{\kappa_o(\kappa_o + \frac{z}{L})} \right\} \quad (40)$$

ここで、 $\kappa_o = \sigma_o \cos^2 \alpha_o$ とおいています。また $x'_o = \tan \alpha_o$ です。上式の複号は、加速の場合がプラス、減速の場合がマイナスです。この式で $z = L$ とおけば、出口での座標 x_1 が次のように求まります。

$$x_1 = 2L x'_o \left\{ -\kappa_o \pm \sqrt{\kappa_o(\kappa_o + 1)} \right\} \quad (41)$$

また (40) を z で微分してから $z = L$ とおけば、

$$x'_1 = \sqrt{\frac{\kappa_o}{\kappa_o + 1}} x'_o \quad (42)$$

が得られます。

ここまではなんの近似も行っていないので、運動方程式の厳密解に対応しています。1次近似における式を得るには、 α_o が十分小さいとして、 $\kappa_o = \sigma_o \cos^2 \alpha_o \rightarrow \sigma_o$ と置きかえます。このとき、(41) と (42) の関係は転送行列の形式で書くことができ、次式が得られます。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2L(-\sigma_o \pm \sqrt{\sigma_o(\sigma_o + 1)}) \\ 0 & \sqrt{\frac{\sigma_o}{\sigma_o + 1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ x'_o \end{pmatrix} \quad (43)$$

これで、一様な加減速場の転送行列が求められたこととなります。

この結果をもちいて、一様場がつくる虚像の位置を求めることができます。加速場の場合を考え、Fig.8 に示されているように、虚像の位置を場の出口から測って D とします。原点から出た軌道にたいしての x_1 と x'_1 の関係から、次式が導かれます。

$$D = 2L \left\{ \sigma_o + 1 - \sqrt{\sigma_o(\sigma_o + 1)} \right\} \quad (44)$$

u_o にたいして U が十分大きければ $\sigma_o \rightarrow 0$ でしたから、その極限で $D = 2L$ となります。

4.5.3 簡単な静電レンズ系

前節までに行った考察を、具体的な静電レンズにたいして適用してみましょう。§4.4 で計算例を示したイメージンレンズは簡単な静電レンズの例ですが、ここではもっと単純な系として、加速型イメージンレンズの右半分だけを切り取ったような、Fig.9 の系を考えます。

この系は、カソードレンズ (cathode lens) とよばれるもの (一部分) です。金属面が $z = 0$ にあるとして、そこから放出される電子を集束し、あるいは結像させることが目的です。電子銃も基本的にはこの系の一種です。

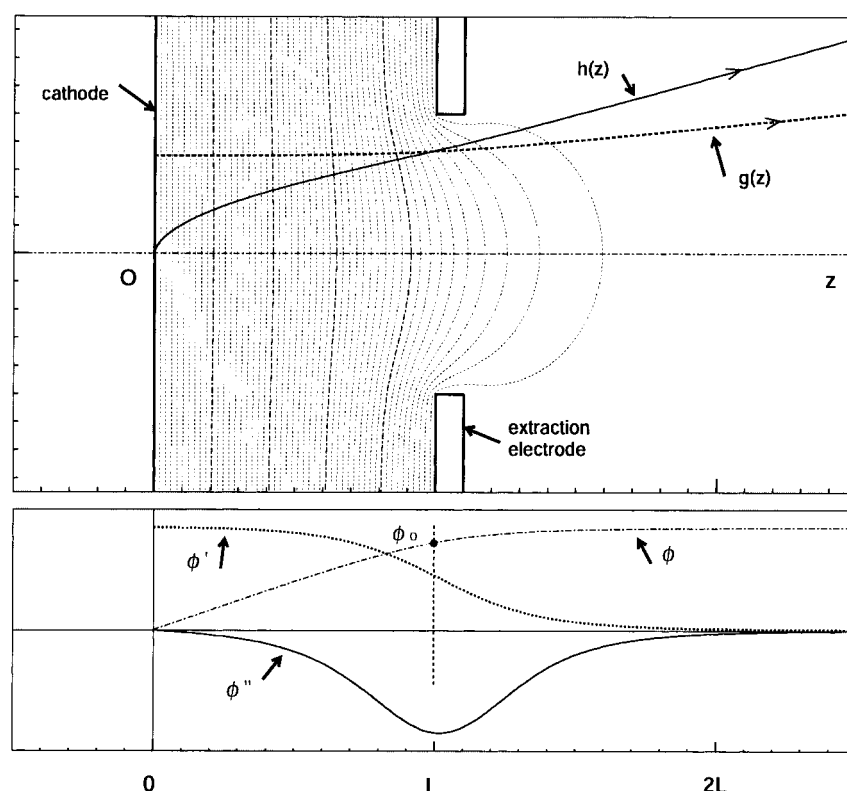


Fig. 9: Lens system composed of a cathode and an extraction electrode. Axial potential $\phi(z)$ and its derivatives with respect to z are also shown.

通常は金属面を負の電位に浮かせて、アース電位の引き出し電極との間に強い電場をつくります。§4.4.2で述べたように、加速率が大きいほどエミッタンスが減少し、素性のよい電子ビームが得られます。たとえば、試料から出る光電子をこのような系で引き出すことで高感度を実現する分光装置が存在します。電子分光系で強い加速が行なわれるとすれば、このような場合です。

この系において、負電位に浮かせた金属部分はしばしば**陰極** (cathode) とよばれ、カソードレンズという名はここからきています。また、引き出し電極は陰極にたいして正の電位にあるので、**陽極** (anode) とよばれることがあります。

もし電子を加速するだけの目的であれば、単に一様な加速場があればいいわけです。たとえば、平行な電極平板のあいだに電圧をかければそのような場ができますが、それでは電子線を取り出すことができません。どこかに電子を通す孔が必要であり、そこで図のような系になります。引き出し電極のかわりにメッシュを置く場合でも、メッシュ孔を通過する電子は図の系と同様の作用をうけることになります。

まずこの系の場の分布を見てみましょう。Fig.9に

において、物面 $z=0$ の近くでは一様な加速場ですが、引き出し電極の近くでは場が乱されます。そこでこの系は、一様加速場と、端の乱れの効果を合わせたものとして扱うことができるでしょう。これは、質量分析系などでもちいられるセクター場を、メインの場と**端縁場** (fringing field) の作用にわけて考えるのと同じです。エネルギーアナライザでも、種類によってはそのような扱いがなされます。

Fig.9には、1次軌道 $g(z)$, $h(z)$ の計算結果も示されています。まず $g(z)$ は物面を傾き0で出射するので、一様加速場の作用をうけません。端の部分では、電場からの力が光軸から離そうとする向きにはたらくので、発散作用をうけます。よって $g(z)$ のかたちには、端の凹レンズ効果だけが現れていることになります。

一方 $h(z)$ の方は、まず一様加速場によって光軸方向に引き寄せられます。つまり、加速場はこの軌道にたいして凸レンズとしてはたらくします。端の部分では、 $g(z)$ と同じ凹レンズ作用をうけます。図を見ると、最終的に場をぬけた後の $h(z)$ の傾きは、最初の物面での傾きより減少しているの、全体としては凸レンズ作用が勝っています。しかし、一様場が実像

をつくることはなく、これにさらに凹レンズ作用が加わるのですから、このような系では虚像しかできません。

もし実像をつくろうとすれば、この系のあとに凸レンズ作用をつくり、 $h(z)$ が光軸と交わるようにしなければなりません。具体的には、引き出し電極のあとに別の電極を置いて静電レンズ場をつくるのが一般的ですが、陰極付近に磁界レンズの場を重畳させることも行われます。このような系全体をカソードレンズとよぶのがふつうです。

さてこれから、Fig.9 の系を一様場の作用と端の効果に分離する作業を行いましょう。§4.5.1 で述べたように、一様場からのずれの効果とは $\phi''(z)$ の寄与です。Fig.9 の下方のグラフのように、 $\phi''(z)$ はつねに負であり、これは凹レンズ作用を意味するのです。また、 $\phi''(z)$ は引き出し電極の位置でピークになっているので、この位置に置いた凹レンズによって端の効果を代表させることができます。

このような扱いが意味をもつためには、 $z=0$ から l まで存在する一様加速場と、 $z=l$ においた凹レンズの作用を合わせたものが、全体の作用をよく近似するものでなければなりません。すなわち、そうなるように凹レンズの焦点距離を決定できるかどうかの問題です。

端の効果に対応する凹レンズの焦点距離 f を求めるために、1次軌道方程式において一様場の作用を除外した方程式、すなわち、

$$x'' = -\frac{\phi''(z)}{4\phi(z)} x \quad (45)$$

をもちいることができます。(あるいは、 $g(z)$ は一様場の作用をうけないのでしたから、最初から $x(z) = g(z)$ だけを考え、1次軌道方程式の x' の項を無視することによって上式になると考えても同じです。)

これから焦点距離を導く操作は、§4.2 において (3) から (5) を求めたときと同様です。すなわち、上式の両辺を $\phi''(z)$ が値をもつ領域で積分します。その際、軌道の高さは一定と見なし、また $\phi(z)$ は、引き出し電極位置での値 $\phi_0 = \phi(L)$ で代表させます。(あるいは、加速が済んだときのポテンシャル値 $\phi(z_2)$ で代用してもわるくありません。) これによって、

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{4\phi_0} \int_{z_1}^{z_2} \phi'' dz \quad (46)$$

が得られます。上式の積分はさらに、

$$\int_{z_1}^{z_2} \phi'' dz = [\phi']_{z_1}^{z_2} = E_1 - E_2 \quad (47)$$

とできます。ここで、 $E_1 = -\phi'(z_1)$ は積分領域の入口での電場強度、 $E_2 = -\phi'(z_2)$ は出口の電場強度です。結局、次式が得られます。

$$f = \frac{4\phi_0}{E_1 - E_2} \quad (48)$$

この結果は、今考えているよりもやや一般の系に適用できます。すなわち、円孔をもつ電極によって、異なる強度 E_1 , E_2 の電場が隔てられている場合です。その際に、電極の孔の存在による場の乱れを、一個のレンズの作用で置きかえることができます。そのように見たときの (48) は、**単孔レンズ (single-aperture lens)** にたいしての**ダヴィソン-カルビックの公式 (Davisson-Calbick formula)** として知られています。

注意すべきは、「単孔レンズ」というレンズが単独に存在するのではなく、端の効果を一様場と切り離して考えたときの作用を指しているということです。一様場の作用は既知のものとして、それからのずれの効果の影響を知りたいときにもちいます。なお、(48) が与える f は、孔の両側の電場強度 E_1 , E_2 の大きさと符号によって、正にも負にもなります。もちろん、正の場合が凸レンズの作用、負の場合は凹レンズです。

公式 (48) において、電極の孔の径が含まれていないのをおかしいと思われるかも知れません。しかし、その寄与は ϕ_0 の中に陰に含まれています。電極面での軸上ポテンシャル ϕ_0 は、ふつうは電極上のポテンシャルで代用してしまいます。しかし、電極孔の直径の依存性を考慮した公式も知られています。

(48) の導出過程においては、かなり大胆な近似をもちいているので、定量的な精度はあまり期待できないように思えます。ところが実際には、孔の作用が極端に強くない限り非常によい近似を与えます。たとえば、メッシュ表面に電場が存在するとき、電子ビームにたいしてのメッシュ孔の効果は、この公式によって実用上十分な精度で見積もることができます。(電子分光装置ではメッシュがよくもちいられるので、メッシュ孔のレンズ作用は重要です。これに関しては後の章で詳しく述べます。)

さて、今考えている系にたいしては、(48) をもう少し具体的に書けます。物面と引き出し電極との電位差を U とすれば、 $E_1 = -U/L$, $E_2 = 0$ です。また、電子の初期エネルギーが小さくて、加速によって得るエネルギー eU に比べて無視できるなら、 $\phi_0 \simeq U$ とできて、

$$f = -4L \quad (49)$$

が得られます。

今の系においては、まず一様加速場によって虚像がつくれ、それがさらに端の凹レンズ効果によって別の位置に写されます。初期エネルギーを無視できる場合で考えると、前節の結果から、一様加速場がつくる虚像の位置は場の出口から測って上流に $D = 2L$ です。これと (49) の凹レンズ作用を組み合わせると、最終的な虚像の位置は $D = 4L/3$ 、つまり $z = -L/3$ となります。また、虚像としての回折面の位置も同様に求めることができますが、結果は $D = 4L$ ($z = -3L$) となります。

全体の系にたいしての計算結果を Fig.10 に示します。これは $\sigma_o = u_o/U = 10^{-3}$ の場合ですが、上記の結果と (ほどほどよく) 合っていることがわかります。

光学レンズ系に慣れている人が Fig.10 を見ると、違和感を覚えるはずですが、つまり、物面の各点から発する軌道の様子はまさに板ガラスの作用であり、通常の光学系ではこのような状況がつくられることはありません。

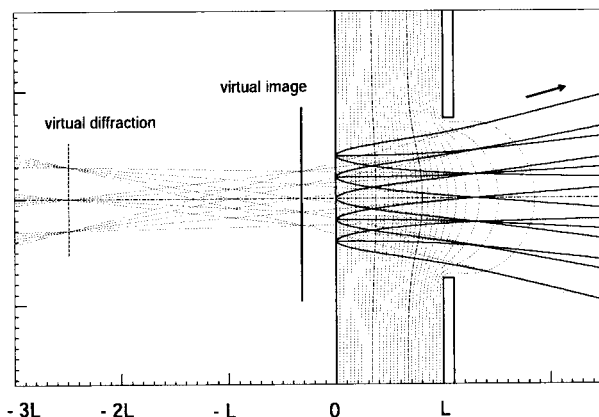


Fig. 10: Virtual image and virtual diffraction formed by a cathode lens system.

4.5.4 一般の静電レンズ

ここでは、通常よくもちいられるタイプの静電レンズにたいして、前節と同様の考察をしてみます。

まず Fig.11(a) は加速型イマージョンレンズ、(b) は減速型イマージョンレンズです。これらの図において、軸上光源から出た 1 次軌道が示されています。この二つの場合を比較できるように、出射角は共通にしています。また、前節では ϕ' と ϕ'' のグラフによって、それぞれ一様場と端の効果の分布の様子を示しました。しかし、ここでは軌道にたいしての作用の大

きを議論したいので、1 次軌道方程式に含まれるかたち、すなわち ϕ'/ϕ と ϕ''/ϕ を図示します。

まず加速型イマージョンレンズを考えます。この系は、一様な加速場の作用に、入口と出口のレンズ作用が重なった系として見ることができます。入口では凸レンズ、出口で凹レンズとなりますが、これは ϕ'' の符号で判断するまでもなく、電場が電子におよぼす力の方向を考えればすぐわかります。この二つの作用のどちらが強いと言えば、 ϕ''/ϕ のグラフからわかるように、入口の凸レンズです。これは単に ϕ の小さい側、すなわち電子の速度の遅い側での作用が勝つということです。

一方、一様加速場の作用が凹か凸かというのは一般には決まらず、相手となる軌道に依存するのです。図のような軌道にたいしては加速場も凸レンズ作用になるので、結局全体としては凸レンズとしてはたらくことになります。

減速型イマージョンでも、同様の考察ができます。一様な減速場の作用がまずあり、図の軌道にたいしては凹レンズとしてはたきます。端の効果は、入口が凹レンズ、出口が凸レンズになりますが、速度の遅い側すなわち出口の凸レンズ作用が勝ちます。全体としてはどうかといえば、図を見ると実像がつくられているので、凸レンズの作用が勝っていることがわかります。

ここでの二つの場合は、どちらも全体では凸となりました。しかし一様場の作用は軌道に依存するので、いつでもそうなるわけではありません。つまり、全体として凹なのか凸なのかは、そのレンズの使い方に依存するという事です。たとえば前節のカソードレンズの系では、もし陰極面から光軸に平行に出た電子だけを問題とするなら、つまり $g(z)$ にたいしての作用を考えるなら全体として凹です。

もし、ある系を結像系としてもちいるなら、次の判断基準で凹か凸かを定めることができます。すなわち、まず物面がどこかを定め、そこから出る 1 次軌道のうちの $h(z)$ に注目します。もしこの軌道がどこかで光軸と交わるなら、実像がつけられるのですから凸の作用です。これは、レンズ場の途中で交わる場合を含みます。また光軸と交わらなくても、レンズ場をぬけた際に傾きが最初より減少していれば、それはやはり凸レンズと見なすべきです。(光学における凸レンズが虚像をつくる場合に、その状況になります。) もし $h(z)$ がどこでも光軸と交わらず、最終的に傾きが増加するなら、凹レンズです。

この判断基準によるなら、経験的に、すべての静

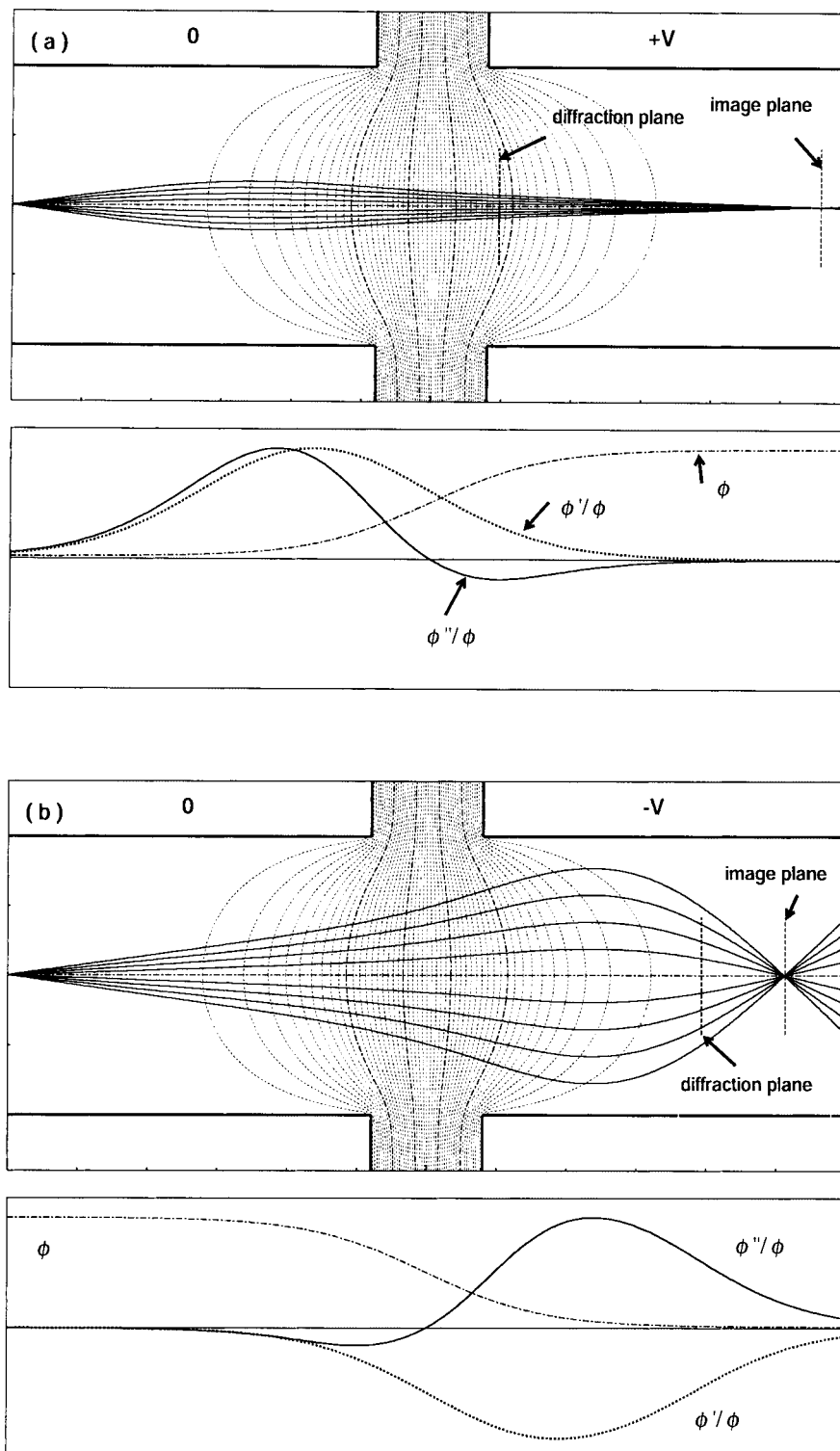


Fig. 11: Distribution of uniform field components ϕ'/ϕ and lens action components ϕ''/ϕ in electrostatic lenses; (a) acceleration-type immersion lens; (b) deceleration-type immersion lens.

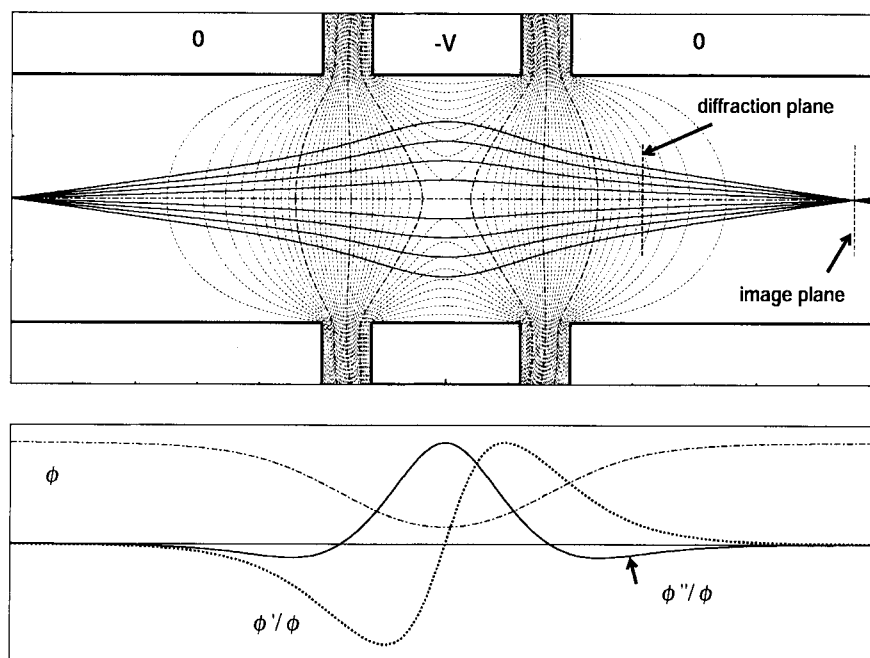


Fig. 12: Distribution of a uniform field component ϕ'/ϕ and lens action component ϕ''/ϕ in a deceleration-type einzel lens.

電レンズ系は凸レンズとなります。(著者の知る限り、反例は存在しません。)よく教科書では、レンズ作用が弱い場合の焦点距離 f の公式において、その f は必ず正であり、したがって静電レンズはいつでも凸であると記されています。しかし、そのような近似を行わない、厳密な証明は見あたりません。

さて、そのような議論は別にして、もう少し大雑把な見方をしてみましょう。Fig.11の(a)と(b)の軌道を比べると、加速型レンズではビームが細く、減速レンズでは大きく膨らんでいます。これは、加速型レンズでは入口が凸レンズ作用なので最初に軌道が絞られ、減速型では逆に、最初に凹レンズ作用をうけて大きく広がるという違いです。§4.4.2において、エミッタンスは加速によって減少し、減速によって増加することを示しました。これも定性的には、ここで述べたような違いからくるものとして理解できるでしょう。

加速型と減速型の違いは、収差を考えるとさらに深刻になります。減速によってビームが広がるということは、それだけ軸外の非線形な作用をうけて、収差によるボケが増加するはずですが、これは、エミッタンスが増加することとは別の問題であることに注意しましょう。収差に関しては後の章で論じますが、収差の観点からも加速と減速の作用の違いが重要なテー

マとなります。

さて、イメージンレンズは通常、レンズ作用を得るためというより、電子を加速か減速する目的でもちいられます。(加減速だけをしたいのに、必ずレンズ作用を伴うので、しかたなく静電レンズの本を探するというケースは少なくないはずですが。)もしレンズ作用だけを得たいのなら、普通はFig.12に示したような、**アインツェルレンズ** (einzel lens) が使われます。

アインツェルというのは入口と出口の電極が同電位ということの意味します。これらの電極を普通はアース電位にして、中央の電極に電位を与えることでレンズ作用を得ます。イメージンレンズだとレンズの両側が異なる電位になってしまうので、純粋なレンズとしてもちいるには不便なわけです。なお、図では中央電極が負電位ですが、このときは減速型アインツェルレンズといいます。

このレンズでは、入口から中央電極までが減速場、中央電極から出口は加速場であり、減速型と加速型のイメージンレンズを合体させた作用になります。一様場からのずれの作用を表わす ϕ''/ϕ の分布を見ると、入口と出口では凹レンズですが、中央の凸レンズ作用が勝っています。これはやはり、速度の遅い場所での作用が強いということです。全体としては例外に

もれず、凸レンズとなっています。

この減速型アインツェルレンズでは、入口の作用が凹レンズなので、そこでビームが膨らんでしまい、収差の点ではよくありません。加速型のアインツェルにすれば、最初にビームが細く絞られるので、収差は減速型よりはるかに小さくなります。(エミッタンスに関しては、加速型でも減速型でも最終的には同じ電位に戻るのです、違いが生じません。)

ただし実際問題としては、加速型アインツェルはあまりもちいられません。それは、中央電極にかかる電圧の大きさの問題です。物面と像面を同じ位置にして比較した場合、減速型より加速型の方がはるかに絶対値の大きな電圧をかける必要があります。減速型では、中央電極の電圧の絶対値は、せいぜいビームの加速電圧と同程度です。たとえば1keVの入射ビームにたいして、もしレンズ中での光軸付近の電位が-1kVより下がると、入射してきた電子はすべて引き返してしまいます。ふつうはそれより絶対値の小さな電位で、十分強いレンズ作用が得られます。

一方、加速型のアインツェルでは、少なくとも加速電圧の数倍から数十倍の電圧が必要です。これはイマージョンレンズの場合も同じで、同じレンズ作用を得るための二つの電極の電位差は、加速型のほうがはるかに大きくなります。

Fig.12 の場合で言えば、この減速型アインツェルでは、中央電極にはビームの加速電圧とほぼ同じ絶対値の電圧をかけています。正確には、1keVの入射エネルギーにたいして-1.08kVです。(光軸付近の電位はもちろん-1kVより0に近い値です。)ところが、加速型アインツェルとしてもちいて同じ位置に像をつくらうとすると、約+20kVの電圧が必要になります。

この違いを直感的に説明するなら、加速場の作用はビームを引き込んで光軸と平行にそろえようという作用であり、レンズとしてののはたきは二次的なものだということです。減速場はそれとは逆に、平行なビームの傾きを増やす方向に働くので、レンズとしての作用が大きくなるのです。

さて、本章で示した計算例では、単純な構造の静電レンズだけを想定しました。静電レンズとは、要するに電子の加減速に付随して生じる作用のことです。そこで、どんな複雑な構造のレンズであっても、加速と減速の作用に分解して考えればよいのです。単純な加速型と減速型のイマージョンレンズが理解できていれば、通常はそれで十分です。

現実の応用に際しては、まず像の位置とか倍率などの近軸特性の要求に従ったレンズ配置を考え、そし

て、できるだけ収差が小さくなるように、各レンズの電極形状を最適化していきます。

残念なことに(設計者にとっては幸いなことに)、静電レンズの収差は、電極形状によってそれほど劇的には変化しません。これは主として、静電ポテンシャルがみたすべきラプラス方程式の解の性質によっています。ラプラス方程式はいわゆる緩和型の方程式であり、境界条件に細かい起伏があっても、境界の内部ではその影響は急激に減衰してしまいます。よって、内部にのこるのは境界条件の大まかな傾向だけです。電極形状を決めるのはもっと現実的な問題、たとえば場所の制約とか放電耐圧、あるいは電源仕様に依る場合が少なくありません。

光学系の設計として大切なのは、レンズの使い方です。あるレンズが発生する収差は、そのレンズをどんな条件で軌道が通過するかで決まるものです。同じレンズでも、ビームが大きく広がった状態、あるいは開き角の大きい状態で入射すれば、収差が増えてしまいます。したがって、全系を通して1次軌道をどうレイアウトするかということが、系の性能を大きく左右します。

今回はそのような、光学系の設計という観点からの議論はほとんどしませんでした。そのためにはやはり収差の理論が必要であり、近軸近似の知識だけで決定できるものではありません。

4.6 まとめ

本章では、軸対称な静電ポテンシャルの中での電子の1次軌道方程式を導き、それをもちいて静電レンズの近軸特性を議論しました。要点をまとめると次のようになります。

(1) 静電レンズの1次軌道方程式を決定するのは軸上ポテンシャル分布 $\phi(z)$ であり、 $\phi(z)$ の増減、つまり電子の加速と減速にともなうレンズ作用が生じる。

(2) 1次軌道方程式は線形斉次であって収差の寄与をふくまず、理想的なレンズ作用に対応する。

(3) 1次軌道方程式の解から転送行列が構成され、これによって軌道の集団としての振る舞いが記述される。転送行列の行列式はエミッタンスの変化を与え、加速によってエミッタンスが減少し、減速によって増加する。

(4) 静電レンズの場合においては、一様な加減速場の作用と、本来の凹凸レンズの作用が共存している。

一様場は光軸という特別な軸をもたず、作用が集束か発散かは相手となる軌道に依存する。

(5) 静電レンズにおいて、一様場の作用を除外して、本来のレンズ作用だけを抽出することが可能である。これをレンズ場の端の効果として扱い、その焦点距離を与えるのが単孔レンズの公式である。

4.7 文献紹介

本章では常微分方程式に関しての知識を少しもちいました。教科書としては、たとえば、

[1] 木村俊房校閲, ポントリャーギン・常微分方程式, 共立出版(1968)

があります。常微分方程式の本は数多くありますが、内容はそれほど違っていません。

静電レンズに関しての教科書としては、第1章でも挙げた次のものが入手しやすいでしょう。

[2] P. W. Hawkes and E. Kasper, Principles of Electron Optics Vol. I,II, Academic(1989)

少し古いものとしては、

[3] A. B. El-Kareh and J. C. J. El-Kareh, Electron Beams, Lenses and Optics I, Academic(1970)

[4] V. K. Zworykin, et. al., Electron Optics and the Electron Microscope, Wiley(1945)

があります。

単孔レンズにたいしてのダヴィッソン-カルビックの公式の導出に関しては、[2]のVol.IIと[4]で解説されています。この公式の精度の評価、およびメッシュ孔のレンズ作用に関しては、

[5] M. Kato and T. Sekine, J. Vac. Sci. Technol. A 14(2), 453(1996)

に報告があります。なお、メッシュ孔の作用に関しては後の章で改めて述べる予定です。

[次回予告]

変分原理から出発して静電レンズの1次軌道方程式を導き、今回と同じ結果が得られることを確認します。その手法を、磁場の存在する場合、相対論補正を考慮した場合に適用して、もっとも一般的な1次軌道方程式を導きます。つぎに、摂動展開の概念と手順を述べたあと、収差係数の表式を導出します。