

連載 (講義)

電子光学入門

— 電子分光装置の理解のために —

(第2回)

嘉藤 誠

日本電子(株) 〒196-8558 東京都昭島市武蔵野 3-1-2

kato@jeol.co.jp

(2004年5月27日受理)

電子分光系は、電子顕微鏡の光学系に比べてビームの開き角が大きく、そのため収差を正確に評価するためのレイトレースの手法が重要になります。今回はまずレイトレースのための運動方程式、およびそこから時間を消去した軌道方程式の導出を述べます。その際は相対論補正のための処方がとくに重要になります。次に、軸対称な磁場がもつレンズ作用を詳しく述べます。一様な磁場分布中の電子軌道を調べることで、磁場を用いたレンズがなぜ収差をもつかが明らかになります。

Introduction to Electron Optics for the Study of Energy Analyzing Systems (2)

M. Kato

JEOL Ltd., 3-1-2 Musashino, Akishima, Tokyo 196-8558.

kato@jeol.co.jp

(Received: May 27, 2004)

Energy analyzing systems are characterized by their large acceptance angles of electrons, and thus precise evaluation of geometrical aberrations is necessary. We begin with the derivation of several trajectory equations suitable for ray tracing, and the prescription of relativistic correction is explained in detail. Lens action of a magnetic lens is then investigated. Analysis of electron trajectories in a uniform magnetic field shows the origin of the aberration of a magnetic lens.

2 電磁場中の電子の運動

2.1 はじめに

前回の第1章「電子光学概論」では、光学レンズとの類似性をたどりながら、電子レンズの近軸特性と収差の概念を述べました。現実の電子レンズにたいして、そのような光学特性をいかに具体的に評価するかということが次の問題です。

このためのもっとも直接的な手法は、レイトレース(ray tracing)すなわちレンズのつくる電磁場の中で電子の運動方程式を数値的に解くことです。レイトレース(あるいは光線追跡)は光学の用語ですが、電子光学でも用いられます。第1章では、光学系の解析手法と

しての摂動展開の概念を述べました。すなわち、まず近軸軌道を求めたのち、それからの非線形のずれを収差係数として求めていくということです。しかし、このような計算で全てが済むわけではありません。摂動計算は、たとえ高次の収差計算をどこまで進めたとしても近似であることには変わりありません。そのような近似がどの程度通用しているかを知るために、レイトレースが必要です。レイトレースで得られる軌道はいわば、「すべての種類とすべての次数の収差を含んだ軌道」です。ただしもちろん、この中に回折収差は含まれません。

電子顕微鏡において、空間分解能を決めるのは対物レンズです。対物レンズの設計の際は、最低次の球面

収差係数と色収差係数を計算しながら、レンズ形状を最適化していきます。その際は高次の収差は無視しているわけですが、高次収差の寄与を調べるためにレイトレースを併用するという事は、実はあまり行なわれていません。電子顕微鏡においては、電子ビームは非常に小さな径の絞りで制限されていて、ほとんど近軸領域の軌道しか用いていないからです。この事情について、やや詳しく述べておきます。(前章の §1.7 の記述と少し重複します。)

まず光学顕微鏡の場合には、空間分解能の限界は光の波長で決まります。顕微鏡の分解能を決める要因は、主として光学レンズの球面収差と色収差、そして光の波動性に起因する回折収差です。このうち、レンズの球面収差と色収差は補正が可能なので、問題は回折収差ということになります。光の回折効果によって、光線束を細く絞ろうとするほどボケが増えます。そこで、顕微鏡において回折の効果を減らそうとするなら、試料の各点からなるべく大きな開き角で光束を取り込まなければなりません。

どれくらい大きな開き角まで取り込めるかは、対物レンズの球面収差と色収差がいくらの角度まで補正できているかで決まります。しかし、どんなにがんばっても取り込み角の上限は $\pm 90^\circ$ であり、その限界まで取り込んでも回折によるボケは0にはなりません。この事実によって、分解能の限界というものが存在することになります。この限界値は波長と同程度の値となり、それが「波長限界」と呼ばれるわけです。

電子顕微鏡が光学顕微鏡と違う点は、通常、軸対称な電子レンズにおいては、球面収差も色収差も補正できないということです。これらの収差によるボケを減らすために、開き角を小さく制限しなければなりません。これは同時に回折によるボケを増やしてしまいます。しかし電子の波長は極端に短いので、回折の効果が効いてくるのは、開き角が非常に小さい値になってからです。そこで、回折が効く寸前まで開き角を制限して、球面収差と色収差によるボケを抑えます。こうすることで、原子を見るような分解能が可能になるのです。

開き角と分解能の関係は、より正確には次のようになります。絞りを用いない開放の状態から始めて、開き角を徐々に小さくしていくと、球面収差と色収差によるボケが減るとともに回折収差のボケが増加していき、どこかで分解能が最小になります。すなわち、一番分解能が良くなる最適開き角 (optimum aperture angle) というものが存在します。電子顕微鏡の高分解能モードにおいては、最適値は数 10 mrad (1 mrad $\approx$

0.06°) の程度になります。(それほど細く絞らなければならないほど、電子レンズの球面収差と色収差は大きいということです。) 開き角をそのような値に設定するために、直径数 10 μm くらいの絞りが対物レンズの中に挿入されます。

もし電子レンズの球面収差と色収差を小さくできれば、それに応じて最適開き角は大きい方にずれます。その条件での分解能は良い方にずれます。収差が小さいほど最適開き角は増えていき、分解能は波長限界に近づくことになります。そこで、電子レンズの収差補正というテーマに期待がふくらむわけです。現状では、最低次の球面収差係数と色収差係数の補正に関して、軸対称でない光学要素を用いる方法が実用になりつつあります。電子の波長程度の分解能を実現するには至っていませんが、これは今後の大きな課題です。

さて、以上は光学顕微鏡と電子顕微鏡の分解能に関してのはなしでしたが、電子分光系においては状況がかなり異なってきます。イメージングなどを行なわない、単にエネルギースペクトルを得る装置に限定して考えましょう。そのような装置においては、空間分解能という概念はありません。装置の課題は、試料から出た電子をいかに多くアナライザに導くか、そしてアナライザ自身は、いかに多くの電子を取り込んでエネルギー分析を行なえるかということです。光学の用語でいえば、結像レンズではなく「集光レンズ」としての動作が要求されるわけです。その際の電子の開き角は大きければ大きいほどよく、理想を言うなら試料面から出たすべての電子を取り込みたいわけです。

具体的に、試料の近くに置いたレンズ系で電子を集めてエネルギーアナライザに導く装置を考えましょう。アナライザの入り口には通常、エネルギー分離を可能にするために、数 mm の幅をもったスリットが置かれます。(スリットの幅をどう選ぶべきかという議論はここではしません。) 試料上の各点から出た電子ビームを、なるべく多くそのスリットに入射させることがレンズ系の役目です。そこで、試料から出たビームを厳密に一点に集束させることが要求されるのではなく、スリット幅の程度のボケまでは許されることになります。これは電子顕微鏡で要求される空間分解能にくらべ6桁程度は大きい値です。回折収差が効いてくるような、空間分解能が最小になる最適開き角までビームを絞る必要はどこにもないわけです。

そのような電子分光系においては、高次収差の寄与が大きいので、設計や解析のためにはレイトレースが不可欠となります。最近の電子分光装置では、視野制限とかイメージングの機能を同時に持つものがあり、

そのような機能に関しては、電子顕微鏡にたいするのと同じ摂動論的な手法が適用できます。しかし、レイトレースが可能なのであれば、それですべて済ましてしまっただけではいけないのでしょうか？ 実際には、レイトレースだけではいろいろと不便なことがおきます。これに関して次に述べておきます。

すでに触れたように、レイトレースの結果として与えられる電子軌道は、すべての種類の、すべての次数の収差を含んでいます。そこで、一点から出たビームはどこでもボケていて、厳密に一点に集束する位置はふつう存在しません。つまり、像面がどこであるのかははっきりしません。像面位置は、軸上から出た電子ビームの開き角を0に近づけた極限でのビームの集束位置として定義されます（ガウス像面の定義）。レイトレースしか手段を持たない場合は、いくつかの軌道を計算して内挿を行なうなどの処置をしないと、そのような極限の位置は求まりません。回折面の位置や像倍率、焦点距離などに関しても同様のことが言えます。電子レンズ系の解析のためには、まずそのような近軸特性を正しく把握することが先決であり、収差はその次に考えるべきことです。

しかし、それよりも何よりも、レイトレースは時間がかかるというのが一番の問題です。レイトレースのためには、電子が通る場所での電磁場を、軌道計算の1ステップごとに与える必要があります。そしてこれがCPU時間のほとんどを占めます。電磁場計算の際に、もし有限要素法のように空間全体をメッシュ分割する手法を用いる場合には、場が直接与えられるのはメッシュの節点だけです。したがって、レイトレースのためにはなんらかの補間が必要であり、すべての空間点で同一の精度を保つのが難しくなります。また、たとえば表面電荷法のような手法であれば、空間の任意の点で補間なしに場が求まります。しかし、計算時間はさらに長くなるのが一般的です。

このような事情から、たとえ電子分光系であっても、レイトレースだけですべてを済ませるのは適切ではありません。通常は、まず1次軌道方程式 (first-order trajectory equation) あるいは近軸軌道方程式と呼ばれる、収差の寄与を取り除いた方程式を解くことで近軸特性を決定します。そして、そのあとで必要な収差係数を計算します。1次軌道、および収差係数の計算のためには、光軸上の場の分布だけが必要です。そこで、最初に場の軸上分布関数を求めて配列に入れておけば、近軸特性や収差係数の計算は瞬時で終わります。電子レンズ形状、あるいは複数のレンズからなる光学系の最適化は、この過程を繰り返すことで迅速に済ませる

ことができます。そして、この最適化のいくつかの段階で、レイトレースによって高次収差の寄与を調べることになります。

もちろん、あまり開き角が大きくなると、収差係数の計算自体あまり意味がなくなり、最初からレイトレースだけで計算するという場合もありえます。また、摂動論的な手法で計算を行なう際にも、1次軌道と収差計算の際に大きな間違いをしないために、チェック手段としてのレイトレースをつねに実行可能にしておくべきです。

2.2 運動方程式

質点が力の場の中におかれたとき、その質点位置の時間変化を微分方程式のかたちで与えるものが運動方程式です。空間にデカルト座標系 xyz を取ったとき、運動方程式の解は $(x(t), y(t), z(t))$ のように時間 t をパラメタとして座標の変化が表されます。運動方程式は、ニュートンが最初に惑星の運動から見出したものですが、その後、特殊相対性理論によって修正がなされました。（当然ながら、運動方程式は数学的に証明されるようなものではなく、自然の法則です。）

2.2.1 非相対論的運動方程式

質点の質量を m 、位置を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ と表します。その質点に働く力 $\mathbf{F}$ と加速度 $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$ の関係を、 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ として与えるのがニュートンの運動方程式です。静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 、および静磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ の中で電子にたいしての運動方程式は次のようになります。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

ここで $e > 0$ は電子の電荷の絶対値で、これには符号は含みません。 $(e$ に符号まで含めると、平方根の中に負号が現れて不自然に見えるなどの不都合が起きるので、このように約束するのが便利です。) 上式の右辺はローレンツ力 (Lorentz force) と呼ばれるものです。磁場の寄与だけをローレンツ力と呼ぶ場合もありますが、本稿では電場による力まで含めてそう呼びます。上式は成分ごとに書けば、

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -e(E_x + \dot{y}B_z - \dot{z}B_y) \\ m\ddot{y} = -e(E_y + \dot{z}B_x - \dot{x}B_z) \\ m\ddot{z} = -e(E_z + \dot{x}B_y - \dot{y}B_x) \end{cases} \quad (2)$$

となります。ここで、座標のうえのドットは時間微分を表します。

上式をそのまま数値的に解くことがレイトレースと呼ばれます。実際に数値計算を行なうには、常微分方程式を解くためのアルゴリズムを利用します。今までに開発されている汎用アルゴリズムのほとんどは、連立の1階微分方程式系にたいしてのものです。なぜなら、どんな高階の微分方程式であっても、適当に変数の数を増やせば連立1階の形式に書き直すことができるからです。上式の場合は、この書き換えは次のようになります。

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \\ \dot{v}_x = -\frac{e}{m}[E_x(x, y, z) + v_y B_z(x, y, z) - v_z B_y(x, y, z)] \\ \dot{v}_y = -\frac{e}{m}[E_y(x, y, z) + v_z B_x(x, y, z) - v_x B_z(x, y, z)] \\ \dot{v}_z = -\frac{e}{m}[E_z(x, y, z) + v_x B_y(x, y, z) - v_y B_x(x, y, z)] \end{cases} \quad (3)$$

これらを $x(t), y(t), z(t), v_x(t), v_y(t), v_z(t)$ の6つの関数にたいしての連立1階微分方程式と見なせば、汎用のアルゴリズムを適用することができます。場の成分を $E_x(x, y, z)$ などと引数をわざわざ書いていますが、引数の x, y, z は6つの未知関数のうちの一部であり、電子の位置の変化を計算していく過程の各ステップで、電子がいまいる場所の電磁場を与えなければならない、ということを明示しています。(当然のことですが。)

もとの運動方程式を連立1階の微分方程式に書き換えることは、単に数値計算のためだけではありません。運動方程式は2階の微分方程式なので、初期条件として時刻 t_0 における電子の位置 (x_0, y_0, z_0) のほかに、初期速度 $(v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ を指定してはじめてその後の運動が決まります。そこで、 $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ という座標をもつ6次元空間を考えれば、この空間での初期位置ごとにその後の運動が決まります。この空間の各点はある時刻における系の状態を完全に指定するわけです。

この6次元空間は、状態空間 (state space) と呼ばれます。状態空間の各点は時間とともに別の点に流れていき、この流れを決定するものが運動方程式 (3) です。運動方程式は、状態空間の各点に速度ベクトルを

くくりつけていると見ることができます。その「速度ベクトル場」をたどって進んでいった軌跡が、運動方程式の解となるわけです。状態空間における「流れの様子」を考えることは、粒子の個々の運動ではなく集団としての振る舞いを考えるということです。

運動法則を状態空間の上で定式化することは、解析力学と呼ばれるものの出発点です。しかし、解析力学の具体的な内容を述べるにはまだ準備が足りません。電子光学のために必要な議論は次章以降で行ないますが、それまでは、状態空間というものの重要性を心に留めておいていただければ十分です。

2.2.2 相対論的運動方程式

ニュートンの運動方程式 (1) は、電子の速度が小さければ十分に正しいことが実証されていますが、速度が大きくなると実験事実と合わなくなります。もし (1) が正しければ、電場によって電子をいくらでも大きな速度に加速できることとなりますが、実際は光速 c を超えることができません。相対論的に正しい運動方程式は、ニュートンの式に次のように修正を加えたものです。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4)$$

ここで、左辺に含まれる

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (5)$$

はローレンツ因子 (Lorentz factor) と呼ばれ、いわゆる「ローレンツ収縮」とか、運動する座標系における時間ののびの比率を与えるものです。非相対論的な極限 $v/c \rightarrow 0$ では $\gamma = 1$ であり、 γ の大きさが相対論的な効果の程度を表します。相対論的に正しく運動を決定できればそれでよいという人にとっては、相対論とは (1) の左辺を (4) の左辺に置きかえるだけのものです。(と、ファインマンの教科書 [1] にも書いてあります。)

(4) において γ を用い、また右辺を $\mathbf{F}$ と記せば、

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{v}) = \mathbf{F} \quad (6)$$

と書けます。 $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ は相対論的な運動量と呼ばれます。これを用いれば上式は $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ となり、非相対論的な運動量 $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ で表したときのニュートンの運動方程式と同じ形になります。

余談ですが、いくつかの教科書では γm を「相対論的質量」と定義して、これが速度と共に増大するので無限大の速度まで加速することができないと説明しています。しかし、 γ は一般に時間の関数なので、(6) の左辺は決して $\gamma m \dot{v}$ ではありません。よって、ニュートンの運動方程式 $m \dot{v} = F$ において m を γm に置きかえることで (6) が得られるのではありません。「相対論的質量」を教わると、 m を γm に置きかえることでいつも相対論的に正しい結果が得られると思ってしまいがちですが、それは誤りです。

このような弊害から、「相対論的質量」の概念を導入したり「静止質量」を定義して m_0 と表すようなことはやめるべきだと主張する人もいます [2]。現代の論文レベルで m_0 という表記が現れることはありませんが、教育の場でそのような概念を用いる有用性も否定できず、なかなか難しいところです。

さて、電子が電場によって無限に大きな速度に加速されないために、ニュートンの運動方程式 (1) の左辺は修正されるべきというのは納得できます。しかし、右辺のローレンツ力の表式はそのままでもいいのでしょうか？ これに関してはあまり解説されることがないので、簡単に述べておきます。

相対論的な運動方程式が導出された過程は次のようです。まず、電磁場中で電子が静止する瞬間を考え、その瞬間ではニュートンの運動方程式が厳密に成り立つと仮定します。電子が静止していても、その時刻に力が働いていれば (1) の左辺の加速度は 0 ではありません。一方右辺では、電子が静止しているので電場だけが寄与し、磁場は関与しません。次に、その静止の瞬間の方程式を、運動している座標系に変換します。その際の座標変換式が、ローレンツ変換と呼ばれるものです。これは、互いに等速運動するすべての座標系で物理法則が不変であるべきという相対性原理によって決まるものです。この変換によって電場のほかに磁場も現れ、(4) の右辺が左辺とともに導かれます。

注目すべきことは、静止した電子に働く力が $F = -eE$ であるという前提（電場の定義）から、運動する電子に働く力としてのローレンツ力が導出されたということです。相対論以前には、電磁場が荷電粒子に及ぼす力の表式としてのローレンツ力は実験的に検証がなされておらず、仮説の段階でした。それを実証する代わりに、相対論は根本原理からそれを導いて見せたわけです。

さて本題に戻ります。相対論的なエネルギー保存則があつて必要になるので、これをまず導いておきます。ニュートン力学では、エネルギー保存則は次のように

して導かれます。まず、運動方程式 $m \dot{v} = F$ の両辺と v との内積をとると、

$$m \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (7)$$

となります。この左辺は、 $mv^2/2$ を時間微分したものとなっています。一方、右辺は力 F のなす仕事率を表します。 F がポテンシャルエネルギー $U(\mathbf{r})$ の勾配として $F = -\nabla U$ と与えられるなら、

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\nabla U(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{d}{dt} U(\mathbf{r}) \quad (8)$$

と書けます。よって (7) は、

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v^2 + U(\mathbf{r}) \right] = 0 \quad (9)$$

となり、左辺の括弧の中、つまり運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和が一定に保たれることが導かれます。この保存則が成り立つ条件は、力がポテンシャルから導かれることと、そのポテンシャルが時間変化せず場所だけの関数であることです。

電磁場中の電子の運動にたいしては、 $U(\mathbf{r})$ は電場に対応する位置エネルギーを表します。磁場は仕事をしないので、エネルギーの表式には現れません。（ただし、もし磁場が時間変化するなら、電磁場が従うマクスウェル方程式によって電場が生じることになり、一般には上式のようなエネルギー保存則は成立しなくなります。）

上の過程を、相対論的な運動方程式 (6) にたいして行なってみましょう。まず (6) は $m(\gamma \dot{v} + \dot{\gamma} v) = F$ ですが、ここで $\dot{\gamma}$ は、 γ の定義式 (5) を時間微分して

$$\dot{\gamma} = \frac{\gamma^3}{c^2} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \quad (10)$$

となります。そこで (6) は次式のようになります。

$$\gamma m \dot{v} + \frac{\gamma^3 m}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \mathbf{v} = \mathbf{F} \quad (11)$$

ニュートンの運動方程式のときと同じく、この両辺と v との内積をとれば

$$\gamma m \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \frac{\gamma^3 m v^2}{c^2} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (12)$$

となりますが、左辺はまとめることができ、

$$\gamma^3 m \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (13)$$

が得られます。これは非相対論的な場合の (7) に対応しますから、この左辺が何の時間微分かを考えれ

ば, その答えが相対論的な運動エネルギー T の表式を与えるわけです. 答えは (10) を見ればすぐわかって, $T = \gamma mc^2 + \text{const.}$ です. 速度が 0 のときに $T = 0$ となるように定数を決めれば, 結局次の表式が得られます.

$$T = (\gamma - 1)mc^2 \quad (14)$$

これは, ポテンシャルエネルギーを除いた粒子のエネルギーが γmc^2 であり, それから静止エネルギー mc^2 を引いたものが運動エネルギーであると解釈されます. (なぜそうなるかの議論はここではしません.) 相対論的なエネルギー保存則は次式で与えられることになります.

$$\frac{d}{dt} [(\gamma - 1)mc^2 + U(r)] = 0 \quad (15)$$

次に, 相対論的な運動方程式 (4) を数値的に計算する方法を考えましょう. ニュートンの運動方程式は簡単に連立 1 次書き直すことができ, (3) になりました. しかし, (4) を同じかたちを書くことはそう簡単ではありません. それを行なうためには, (4) あるいはそれと等価な (11) を $\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z$ で解く必要がありますが, それを行なうのは大変です.

この作業は, エネルギー保存則を導く途中で出てきた式を用いれば, 容易に行なうことができます. すなわち, (11) に (13) を代入すれば, ただちに次式が得られます.

$$\gamma m \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} - \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (16)$$

よって, ローレンツ力の表式を代入すれば,

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{e}{m\gamma} \left[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \frac{\mathbf{v}}{c} \right] \quad (17)$$

となります. 磁場による力は $\mathbf{v}$ に直行するので, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = 0$ であることを用いています. 上式は $\dot{\mathbf{v}}$ で解かれているので, ニュートンの運動方程式と同じ変数にたいして数値計算が可能です.

なお (17) から, 電子にはたらくローレンツ力と電子の加速度 $\dot{\mathbf{v}}$ は同じ方向を向いていないことがわかります. すなわち, 電子の運動方向のほうが, それに直行する方向に比べて, 非相対論的な場合よりも加速が弱まります. ニュートン力学では, 粒子が受ける力と加速度の比例係数を質量と呼ぶわけですが, 相対論的な力学においてもこの概念を無理に保とうとすれば, 質量を運動方向とそれに直行する成分に分けなければならず, 「縦質量」と「横質量」という概念が生まれました. しかし, 運動方程式を運動量の時間微分を与えるかたちで (6) のように表すのであればそのような用語は不要になるので, 現在では死語になっています. しかし目的によっては, これらは有用な概念です.

2.3 軌道方程式

2.3.1 時間を消去すること

前節で説明した運動方程式は, 時間を独立変数 (パラメタ) として, 時間の経過とともに系がどう変化するかを述べたものです. しかし, 時間を独立変数とした記述がいつでも便利とはかぎりません. 電子レンズによって電子がどのように集束されるかを調べるときに, われわれが知りたいのは電子がどのような道筋をたどるかということであり, 電子がどの時刻でどの位置にいるかはふつうは余分な情報です. またエネルギーアナライザの場合を考えても, 問題は, あるエネルギーをもって入射した電子が最終的に検出器のどの部分に到達するかであって, そのときの時刻を知る必要はありません.

光学レンズ系の場合, 光線図を描く際に時間という変数を意識することはありません. 光はもちろん有限の速度で進んでいくわけですが, だからといって光線経路を時間の関数として記述しようとは思いません. 時間を意識しないで済む理由は, 光線の振る舞いを決める法則, すなわちスネルの法則とか光路長に関するフェルマーの原理において, すでに時間が消去されているからです. そこで電子光学においても, 運動方程式から時間の概念を追い出してしまって, 電子のたどる経路だけを定める法則を知りたいくなります.

ただし例外的には, 荷電粒子の光学系において時間が本質的な場合もあります. 飛行時間型質量分析器 (time-of-flight mass spectrometer) と呼ばれるものがありますが, これは荷電粒子が, ある決まった距離を運動するのに要する時間を測ることで, その粒子の質量数を知るものです. (イオンのエネルギーがある程度ばらついていても, 質量さえ同じなら同じ飛行時間で検出器に到達するような設計がなされます.) また, 高周波電圧を用いるタイプの粒子加速器も時間が本質的です. しかし, このような例を除けば, 荷電粒子装置において問題になるのは粒子の通った道筋だけです.

さて, 運動方程式から時間を消去することは可能であり, その際は時間以外の別の変数をパラメタにとることになります. 電子の運動をデカルト座標 (x, y, z) で記述する場合, 光軸をたとえば z 軸に選んで z をパラメタとして用い, 電子軌道を $(x(z), y(z))$ のように表すことができます. この場合にはもちろん, すべての電子が z の一方向に流れていく状況が必要で, 途中で逆方向に折り返すことがあると困ります. ふつうの

電子光学系ではそのような状況はありませんし、光軸に沿った決まった領域で、たとえば物面 $z = z_0$ から像面 $z = z_i$ まで軌道計算をしたいというような場合が普通なので、実用上はこの方法が一番便利です。

別のパラメタの取りかたとして、軌道に沿った弧の長さ s をもちいて $(x(s), y(s), z(s))$ のように表すこともできます。この方式では、もともとの表示 $(x(t), y(t), z(t))$ におけるパラメタが t から s に入れ替わっただけで、考える変数の数は変わりません。しかし s をパラメタにとる方式は、軌道の微分幾何学的な性質、すなわち軌道の「かたち」そのものを記述するのに適したものです。もし $(x(t), y(t), z(t))$ のかたちで電子の運動が与えられた場合は、軌道の形状と、それに沿って時間の関数としてどのように進んでいくか、という二つの情報を同時に含んでいることになります。一方 $(x(s), y(s), z(s))$ という表示は、 s は軌道に沿って値が決まってしまうので、軌道の形状の情報だけを含みます。

数値計算の際にも、 s がパラメタであれば、 s をどれくらいの刻みで計算すべきかがあらかじめ見当がつきます。(ある程度経験があればのはなしですが。) もし t がパラメタだとそうはいきません。また、電子の加減速をとまなう光学系では、一定の t の刻みで運動方程式を解くと、速度の大きくなる場所で1ステップの位置変化が大きくなりすぎて、精度が劣化する場合があります。このような場合でも、 s をパラメタとして解けば、たとえ固定刻みでも精度が安定します。

時間 t とか z 座標をもちいる場合に比べると、弧長 s をパラメタにとるのは少し抵抗があるかもしれませんが、弧長 s は本来、すでに決定された軌道に沿って測っていくことで決まる値なので、 s が「独立」変数であると言われても、最初はなにか釈然としないと思います。しかし、 s をある刻みで指定しながら軌道を1ステップづつ計算していくことは可能です。あとで実際に s をパラメタとした軌道方程式を導きますが、その際には具体的なイメージをもってもらえることができます。

なお言葉づかいの問題ですが、これから「軌道」というときには、時間は問題にせず道すじだけを考えているという約束にしましょう。時間をパラメタと考えるときは、軌道ではなく「運動」と言うことにします。なお、時間を用いて議論している際でも、運動の道すじだけが念頭にあるときには軌道と表現することもあります。電子光学における「1次軌道」などの用語は、時間は消去されているという意味合いが含まれています。

2.3.2 加速ポテンシャル

軌道方程式を導くための準備として、静電ポテンシャルの原点のとり方に関して先に述べておきます。非相対論的な場合のエネルギー保存則は前節で導きました((9)式)。これは運動エネルギーと位置エネルギーの和を定数 E とおいた形で、

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(\mathbf{r}) = E \quad (18)$$

と表されます。上式において、位置エネルギー $U(\mathbf{r})$ は、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ に対応する静電ポテンシャル $\Phi(\mathbf{r})$ を $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$ で定義すれば、 $U(\mathbf{r}) = -e\Phi(\mathbf{r})$ と書けます。

さて、静電ポテンシャル $\Phi(\mathbf{r})$ はその勾配が電場を与えればよいので、定数分だけ不定です。そこでこれを利用して、上式の E が0になるように Φ の原点をとることができます。この約束のもとで、上式は

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\Phi(\mathbf{r}) \quad (19)$$

となります。すなわち、電子が静止する場所で $\Phi = 0$ とするということです。こうすれば、電子のいる場所における $\Phi(\mathbf{r})$ の値がそのまま電子の運動エネルギーに対応し、かならず $\Phi(\mathbf{r}) \geq 0$ です。この約束は電子光学で一般に用いられていて、公式を簡略化するのに有用です。このように原点を約束した $\Phi(\mathbf{r})$ は、加速ポテンシャル (acceleration potential) と呼ばれます。

この $\Phi(\mathbf{r})$ は、光学系に印加される現実の(つまりアース電位から測った)電圧値とは、一般に定数だけ違ってきますから注意が必要です。ある光学要素、たとえば静電レンズがつくる電位分布を $V(\mathbf{r})$ 、そこに入射する電子(あるいはその系のどこかで発生する電子)の運動エネルギーを $e\Phi_0$ とするなら、

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0 + V(\mathbf{r}) \quad (20)$$

と表すことができます。ただしこう書いても、 $V(\mathbf{r})$ は現実の電圧値と一致するとは限りません。 $V(\mathbf{r})$ の定義を正確に述べれば、「電子の運動エネルギーが $e\Phi_0$ である場所での電位が0になるように電位の原点を決めたときの電位分布」になります。しかしあまり難しく考えず、 $\mathbf{r}$ という場所に電子が到達したとき、その電子の運動エネルギーが正しく $e\Phi(\mathbf{r})$ で与えられるように、付加定数をうまく調整すればよいわけです。

念のため、具体例を二つあげておきます。まず、アース電位の領域から電子ビームがやってきて静電レンズに入射する場合を考えましょう。 Φ_0 はもちろん入射エ

エネルギーに対応する値になり, この場合は静電レンズがつくる実際の電位分布がそのまま $V(r)$ となります.

二つ目の例として, 実際の電圧として 10 kV が印加された陰極から, 初期エネルギー 1 eV の熱電子が放出されてアース電位の陽極で引き出される場合を考えます. (つまり電子銃です.) この系のつくる $V(r)$ は, 陰極での値が 0 になるように, 実際の電位分布に 10 kV を加えた値を用います. それに $\Phi_0 = 1$ V を加えたものが $\Phi(r)$ です. 陽極を通過したあとの $\Phi(r)$ は, もしその他に電場が存在しなければ 10 kV+1 V の値のまま定数となり, その領域での電子の運動エネルギーを正しく与えます.

以上のように, 加速ポテンシャル $\Phi(r)$ は単に電場分布を与えるためのものではなく, 「どんなエネルギーをもった電子を考えているのか」を同時に決定する量です. このことを忘れてはなりません.

さて, (19) を用いると, 速度 v を場所の関数として表すことができます. すなわち, (19) を v で解いて

$$v(r) = \sqrt{\frac{2e}{m}\Phi(r)} \quad (21)$$

が得られます.

(21) に対応する, 相対論的な表式も求めることができます. 相対論的なエネルギー保存則は, (19) における左辺の運動エネルギーの表式を (14) に入れかえれば得られます. すなわち (19) に対応する式は,

$$mc^2(\gamma - 1) = e\Phi(r) \quad (22)$$

となります. これはまず γ で解くことができ, γ が場所の関数として次のように求まります.

$$\gamma(r) = 1 + 2e\Phi(r) \quad (23)$$

ただし,

$$\epsilon = \frac{e}{2mc^2} \quad (24)$$

とおいています. γ と v の関係は (5) です, それを v で解けば v が場所の関数として求められ, 結果は次のようになります.

$$v(r) = \frac{1}{\gamma(r)} \sqrt{\frac{2e}{m}\hat{\Phi}(r)} \quad (25)$$

ここで,

$$\hat{\Phi}(r) = \Phi(r)(1 + \epsilon\Phi(r)) \quad (26)$$

と定義しています. この $\hat{\Phi}(r)$ は, あとで見るように, 加速ポテンシャルの相対論補正としての役割を果た

すものです. この勾配を計算してみると, 途中で (23) を用いれば

$$\nabla\hat{\Phi} = \nabla(\Phi + \epsilon\Phi^2) = (1 + 2\epsilon\Phi)\nabla\Phi = \gamma\nabla\Phi \quad (27)$$

となり, Φ の勾配の γ 倍を与えます. 以上の結果は, 軌道方程式を導く際に用います.

ここで, 物理定数の数値を記しておきます. 電子にたいしての計算において必要となる定数は次のようです.

$$\begin{aligned} m &= 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg} \\ e &= 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \\ c &= 2.998 \times 10^8 \text{ m/s} \\ \epsilon &= \frac{e}{2mc^2} = 0.9785 \times 10^{-6} \text{ V}^{-1} \end{aligned} \quad (28)$$

上の ϵ の値と γ の表式 (23) とから, $\Phi = 1$ kV, 10 kV, 100 kV, 1000 kV にたいしてそれぞれ, $\gamma = 1.002, 1.02, 1.2, 3.0$ となります. γ が目だって 1.0 から違ってくるのは, 電子のエネルギーが 1 MeV に近づいてからです. もちろん, γ が大きい小さいかという判断は, 何にたいして相対論の影響を考えるかに依ります.

2.3.3 弧長 s をパラメタとした軌道方程式

実際に運動方程式から時間を消去して, 軌道を決定する方程式を導きましょう. パラメタの選び方は, 実用的には先に述べた s と z だけ考えれば十分です. (単に軌道形状を記述するだけの, 意味を特定しない一般のパラメタを想定することも可能ですが, ここでは述べません.) 両者で軌道方程式を導く過程を比べると, s をパラメタにとる場合のほうがきれいに定式化できます. もともとの運動方程式が x, y, z に関して平等なので, z を独立変数にとるとその対称性をくずすことになるからです. そこで, 先に s をパラメタにとる場合から考えます.

もともになる運動方程式は, 電子の位置を $\mathbf{r}(t)$ と表して, この時間変化, つまり d/dt という微分演算にたいしての応答がどんな関係式を満たすべきかを与えたものです. 運動方程式の独立変数を弧長 s に変換するという意味は, 電子の位置を $\mathbf{r}(s)$ と表し, d/ds という演算を含む式に書きかえるということです.

そこで, $\mathbf{r}(s)$ を s で微分したもの, すなわち

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (29)$$

の意味をまず考えておきましょう。このベクトルは軌道 $r(s)$ に沿った方向で、かつ長さが1であることはすぐわかります。すなわち、 $u = u(s)$ は単位接ベクトルです。これは時間をパラメタとしたときの速度ベクトル $v = v(t) = dr(t)/dt$ に対応するものです。 v は運動の方向と、それに沿っての運動のはげしさ（つまり速度の大きさ）の両方を表すものですが、 u は単に軌道の方向のみを示します。われわれは軌道の形だけに興味があり、それに沿ってどんな速度で進むかは考えないわけですから、この u がどう変化していくかを問題とすればいいわけです。

軌道に沿っての u の変化は、 $u' = u'(s) = d^2r(s)/ds^2$ で与えられます。これは時間をパラメタとしたときの加速度に対応します。 u はつねに単位ベクトルなので、その変化 u' は u に直行します。そして、 u' が大きいほどその点で軌道の曲がりが多いことになります。 u' の長さは曲率 (curvature) と呼ばれ $\kappa = \kappa(s)$ で表します。また、その逆数 $\rho = 1/\kappa$ は曲率半径 (radius of curvature) と呼ばれます。軌道上のある点において、その近傍の軌道は u と u' で張られる平面上に含まれます。Fig.1 にその様子を示します。

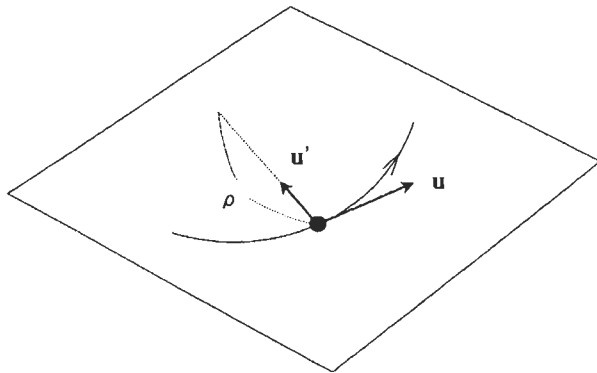


Fig. 1: Unit tangential vector u and its derivative u' of a trajectory.

次に、 v と u の関係は

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = vu \quad (30)$$

となります。これは単に、 v の大きさが v で方向が u であることを言っているだけです。これをさらに時間微分すれば、途中で $\dot{u} = (du/ds) \cdot (ds/dt) = vu'$ を用いて

$$\dot{v} = \dot{v}u + v^2u' \quad (31)$$

が得られます。右辺の第1項は軌道に沿った方向、第2項はそれに直行する方向です。そこで、電子に働く力 F もその二つの方向に分けて考えれば、運動方程

式 $m\dot{v} = F$ は次のように表されます。

$$m(\dot{v}u + v^2u') = F_{\parallel} + F_{\perp} \quad (32)$$

ここで、 $F_{\parallel}$ は力の運動方向成分（縦成分）、 $F_{\perp}$ はそれに直行する成分（横成分）です。これにより、上式は縦方向と横方向の二つの式に分かれます。このうち、縦方向の運動方程式 $m\dot{v}u = F_{\parallel}$ は単に速度の変化を与えるだけですから、われわれには必要のない情報です。軌道の形、つまり u の変化を与える式は横方向成分から得られて、

$$mv^2u' = F_{\perp} \quad (33)$$

となります。

ローレンツ力の場合の (33) の右辺の具体形は次のようになります。 $F = -e(E + v \times B)$ のうち、まず電場の横成分は、 E から E の u 方向への射影成分を引き去ればいいですから、

$$E_{\perp} = E - (E \cdot u)u = -[\nabla\Phi - (\nabla\Phi \cdot u)u] \quad (34)$$

となります。また磁場からの力はずっと軌道に直行します。そこで (33) は次のようになります。

$$mv^2u' = e[\nabla\Phi - (\nabla\Phi \cdot u)u] - evu \times B \quad (35)$$

さて、上式の両辺には速度 v が含まれますが、速度は時間を独立変数にとったときの概念であり、軌道を考える際は消去すべき量です。これを行なうために、すでに導いておいた場所の関数としての $v(r)$ ((21) 式) を用いることができます。これを代入して始めて、運動方程式から時間が完全に消去されたこととなります。最終的に次式が得られます。

$$u' = \frac{1}{2\Phi} [\nabla\Phi - (\nabla\Phi \cdot u)u] - \sqrt{\frac{e}{2m\Phi}} u \times B \quad (36)$$

これが目的としていた、 s をパラメタとした軌道方程式です。これは、 $r(s) = (x(s), y(s), z(s))$ と $u(s) = (u_x(s), u_y(s), u_z(s))$ に関しての連立1階微分方程式として書き下せるので、数値的に解くことができます。

時間をパラメタとして運動方程式を解く場合と比べて、(36) の数値計算を行なうための手順は何も変わるところはありません。ただし、与える初期条件は、初期位置とその点での軌道の方向であって、初速度を与える必要はなくなっていることに注意しましょう。（時間を消去したのですから、そうでなくてははいけません。）

次に、相対論的な場合の軌道方程式を導きます。相対論的運動方程式は、(11) から

$$\gamma m \dot{v} + \frac{\gamma^3 m}{c^2} (v \cdot \dot{v}) v = F_{\parallel} + F_{\perp} \quad (37)$$

と書かれます。左辺のうち、第1項の中の $\dot{\mathbf{u}}$ は(31)で与えられることに変わりありません。また、左辺の第2項は運動方向を向いているので横成分はありません。よって、上式の横成分は、

$$\gamma m v^2 \mathbf{u}' = \mathbf{F}_\perp \quad (38)$$

となります。(左辺の γm は「横質量」です!)これにローレンツ力の横成分の式を入れれば、

$$\gamma m v^2 \mathbf{u}' = e[\nabla\Phi - (\nabla\Phi \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}] - ev\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (39)$$

となります。

上式において時間の概念を含む γ と v は、ともに場所の関数として(23),(25)で与えられているので、あとはこれらを代入するだけです。しかし、上式と非相対論的な場合の(35)を見比べてみると、形式上の違いは上式の左辺に γ が入っていることだけです。そこで、少し近道ができます。(v(r)は非相対論的な場合と相対論的な場合で異なるので、本当の違いはそれだけではありません。)上式の両辺に γ をかければ、

$$m(\gamma v)^2 \mathbf{u}' = e[\gamma \nabla\Phi - (\gamma \nabla\Phi \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}] - e(\gamma v)\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (40)$$

となり、これは(35)において $v \rightarrow \gamma v, \nabla\Phi \rightarrow \gamma \nabla\Phi$ と置きかえたものです。ところが、(25)と(27)からわかるように、これらの置きかえはいずれも $\Phi(\mathbf{r}) \rightarrow \hat{\Phi}(\mathbf{r})$ とするだけで済んでしまいます。そこで軌道方程式も、非相対論的な方程式(36)において $\Phi(\mathbf{r})$ を $\hat{\Phi}(\mathbf{r})$ に入れかえるだけで得られます。すなわち、

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{2\hat{\Phi}} \left[\nabla\hat{\Phi} - (\nabla\hat{\Phi} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \right] - \sqrt{\frac{e}{2m\hat{\Phi}}} \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (41)$$

となり、これが目的としていた相対論的な軌道方程式です。

このように、相対論的な効果は単に $\Phi(\mathbf{r})$ を $\hat{\Phi}(\mathbf{r})$ に置きかえるだけということになり、 $\hat{\Phi}(\mathbf{r})$ が加速ポテンシャルの相対論補正と呼ばれるゆえんです。

ここで、静電レンズの重要な性質を述べておきます。まず非相対論的な軌道方程式(36)において磁場のない場合を考えると、その方程式の中には荷電粒子の種類を特徴づける m も e も含まれません。これは、同じ加速ポテンシャルにたいしての荷電粒子はすべて同じ軌道をたどることを意味します。(ただし、 e の符号が変わるときは Φ の符号が変わります。)たとえば、1kVで加速された電子と1kVで加速された負イオンは、静電レンズへの入射位置と入射方向が同じなら同じ軌道になるということです。

この事実の定性的な説明は次のようになります。同じ加速電圧であっても、重たい粒子ほど速度が小さくなります。重たいということは同じ力にたいして加速度を受けにくい、よって曲げられにくいわけですが、しかし遅く走る分、電場から力を受ける時間が長くなります。反対に軽い粒子は曲げられやすい一方で、速度が大きいのので電場を短時間で通り過ぎてしまいます。この二つの効果が打ち消しあつて、結果的に軌道は同じになるのです。

電荷に関しても似た事情です。電荷が大きいのほど電場から受ける力が大きくなり、強く曲げられそうですが、速度が大きくなる分電場をはやく通り過ぎること、やはり軌道は同じになります。

静電レンズの作用を時間を独立変数にとって解析しようとする、多数の要素(速度、加速度、力、質量、電荷)を同時に考慮しなければなりません。上に述べた複数の効果が打ち消し合うということが定性的には言えても、実際に軌道が変わらないことを示すのは大変です。時間を消去した軌道方程式のおかげで、静電レンズの特性が明快に示されたわけです。

相対論的な軌道方程式(41)ではどうでしょうか? 「相対論的な効果は静止質量を相対論的質量に入れかえるだけだから、非相対論的な軌道が質量に依らないのであれば、相対論的にもその結果は正しい」と考えてはいけません。(こう考える人が多いのは「相対論的質量」の弊害の一つです。) $\Phi(\mathbf{r})$ を $\hat{\Phi}(\mathbf{r})$ におきかえる規則には e が含まれ、これは m と e に依存します。すなわち、 m が小さく e が大きいのほど補正の効果が大きくなり、その結果、軌道は m と e に依存することになります。なお、相対論補正に関してのその他の注意点は、§2.4においてまとめて述べます。

2.3.4 z座標をパラメタとした軌道方程式

z 座標をパラメタにとった場合の軌道方程式を求めるために、上で求めた s をパラメタとした軌道方程式を出発点にしましょう。そこでは時間はすでに消去されているので、ふたたび運動方程式から始めるよりは楽です。

s に関する微分と z に関する微分の関係は、 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (x'^2 + y'^2 + 1)dz^2$ を用いれば、

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} \frac{d}{dz} \quad (42)$$

と求まります。ここでは、ダッシュは z に関する微

分を表します。上式を非相対論的な軌道方程式 (36) に入れば, s に関する微分を z に関しての微分に変換できます。その際,

$$\frac{d}{dz}(x, y, z) = (x', y', 1), \quad \frac{d^2}{dz^2}(x, y, z) = (x'', y'', 0) \quad (43)$$

であることに注意します。

(36) に (42) の代入を行なって成分ごとに書き下すと, 3つの式が得られます。それらは x'' と y'' に関しての連立方程式となります。未知数が2つで式が3つとなりますが, それらは独立ではなく, 3つのうちのどの2つを組んでも同じ式が得られます。結果は次のようになります。

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{2\Phi}(x'E_z - E_x)(1 + x'^2 + y'^2) \\ \quad + \sqrt{\frac{e}{2m\Phi}}[-x'y'B_x + (1 + x'^2)B_y \\ \quad \quad - y'B_z]\sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \\ y'' = \frac{1}{2\Phi}(y'E_z - E_y)(1 + x'^2 + y'^2) \\ \quad + \sqrt{\frac{e}{2m\Phi}}[-(1 + y'^2)B_x + x'y'B_y \\ \quad \quad + x'B_z]\sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \end{cases} \quad (44)$$

相対論的な場合も同様にして導くことができます。しかし, $\Phi(\mathbf{r}) \rightarrow \hat{\Phi}(\mathbf{r})$ の置きかえで相対論補正が済んでしまうことをすでに知っているのです。それを用いましょう。この際, $\nabla\Phi = -\mathbf{E}$ は $\nabla\hat{\Phi} = \gamma\nabla\Phi = -\gamma\mathbf{E}$ に置きかわりますから, (44) を相対論的に書き直した軌道方程式として, 次式が得られます。

$$\begin{cases} x'' = \frac{\gamma}{2\hat{\Phi}}(x'E_z - E_x)(1 + x'^2 + y'^2) \\ \quad + \sqrt{\frac{e}{2m\hat{\Phi}}}[-x'y'B_x + (1 + x'^2)B_y \\ \quad \quad - y'B_z]\sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \\ y'' = \frac{\gamma}{2\hat{\Phi}}(y'E_z - E_y)(1 + x'^2 + y'^2) \\ \quad + \sqrt{\frac{e}{2m\hat{\Phi}}}[-(1 + y'^2)B_x + x'y'B_y \\ \quad \quad + x'B_z]\sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \end{cases} \quad (45)$$

電子光学系におけるレイトレースは, この式を数値的に解くのが一番便利です。場の対称性に関しては何も仮定していませんから, 軸対称系に限らず任意の電磁場中で用いることができます。ただし, もし途中で軌道が z の負方向に折り返す場合は, そこで $x'(z)$ と $y'(z)$ が無限大になって計算が止まってしまいます。そのような可能性がある場合は, パラメタ s を用いた軌道方

程式か, あるいはもとの運動方程式を解くことになります。

2.4 相対論補正

前節では電子の軌道方程式を導きましたが, かたちのうえでは相対論的な方程式は非相対論的な場合と大きな違いはなく, 加速ポテンシャル $\Phi(\mathbf{r})$ を, その相対論補正 $\hat{\Phi}(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r})(1 + \epsilon\Phi(\mathbf{r}))$ ((26) 式) で置きかえるだけで済んでしまいました。そこで, 数値計算の際にはいつも $\hat{\Phi}(\mathbf{r})$ を用いて相対論的な方程式を解けばよく, とりたてて相対論的な効果の大きさを気にする必要はありません。

しかし, 非相対論的な議論を出発点にすべき場合もあります。たとえば, ある特定の電磁場分布の中で, 非相対論的な近似のもとであれば軌道の解析解が存在することがあります。あるいは, エネルギーアナライザの分散が, 非相対論的な近似ならエネルギーに正確に比例する, といった場合もあるでしょう。そのようなときは, まず非相対論的な扱いによって理論を構成し, 相対論的な効果はその補正として, あとから考慮する方がよいわけです。相対論的な効果を「補正」として扱うのは, そのような事情からです。

電子軌道に対する相対論補正は, 磁場だけが存在する場合は容易ですが, 電場があるとやっかいです。まず磁場のみの場合から述べていきます。

2.4.1 磁場中の軌道にたいしての補正

磁場のみの場合の電子の非相対論的な軌道方程式は, 弧長 s をパラメタとして次式で与えられます。

$$\mathbf{u}' = -\sqrt{\frac{e}{2m\Phi}}\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (46)$$

相対論的に正しい表式は,

$$\mathbf{u}' = -\sqrt{\frac{e}{2m\hat{\Phi}}}\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (47)$$

です。相対論補正は, 単に Φ を $\hat{\Phi}$ で置きかえれば得られ, 今の場合電場はないのでこれらは定数です。そこで, 加速ポテンシャル Φ は, 単に「加速電圧」と呼んでもいいでしょう。(正確には, 加速をうける前の初期エネルギー分を加速電圧に加えたものです。) すると $\hat{\Phi}$ は, 「加速電圧の相対論補正」と呼ぶべきものになります。この言葉づかいで言うなら, 電子の本当の加速電圧が Φ であるとき, 加速電圧があたかも $\hat{\Phi}$ になっ

たとえて非相対論的な軌道を計算すれば、それが相対論的に正しい軌道になるわけです。

ここで注意すべきことがあります。まず、相対論的に正しい加速電圧が Φ なのでは決していないということです。電子が電場で加速されることによって得るエネルギーはあくまで $e\Phi$ であって、 $e\hat{\Phi}$ なのではありません。(相対論によって修正されるのは、電場から受ける仕事によって増加する運動エネルギーの表式です。) また同様に、現実の電場はあくまで $E = -\nabla\Phi$ であって、相対論的に正しい電場が $-\nabla\hat{\Phi} = -\gamma\nabla\Phi$ になるのではありません。

また別の注意点として、 Φ を $\hat{\Phi}$ に置きかえることで、すべての相対論補正が済むわけではありません。たとえば非相対論な速度の表式 (21) と、その相対論的な場合 (25) を見比べてみれば、両者は Φ と $\hat{\Phi}$ の違いだけではないことがわかります。もしこの置きかえだけで済むとすれば、 $\Phi \rightarrow \infty$ の極限で、相対論的な速度は (21) と同様に無限大になってしまいます。しかし (25) においてその極限をとれば、光速 c が上限になることを示すことができます。

すなわち、 $\Phi(r)$ を $\hat{\Phi}(r)$ で置きかえるという処方は、あくまで軌道のかたちに関してのみ通用するということです。速度は時間変化を表すための量なので、たとえそれが場所の関数として表されるとしても、同じ処方は適用できません。

なお参考までに、相対論的力学の検証として、上に述べたことを直接的に確かめる実験が行なわれています [3]。すなわち、電子を Φ の電位差で加速し、加速された後の電子の速度を測定するとともに、最終的に電子をターゲットに衝突させて発生する熱量を測定します。電子の速度は確かに (25) で与えられ、電子が電場から得たエネルギーは $e\Phi$ であることが確認されています。

さて、(46) と (47) の左辺は曲率を表すベクトルで、その長さが曲率 κ 、その逆数 $\rho = 1/\kappa$ が曲率半径を与えるのでした。加速電圧が Φ であるときの、曲率の非相対論的な値を $\kappa_N(\Phi)$ 、相対論的な場合を $\kappa_R(\Phi)$ と表すことにします。(添え字 N は Newton あるいは non-relativistic の意味、 R は relativistic と思ってください。) $\kappa_R(\Phi)$ を計算するためには、非相対論的な軌道方程式 (46) において $\Phi \rightarrow \hat{\Phi}$ とすればいいわけですから、この関係は

$$\kappa_R(\Phi) = \kappa_N(\hat{\Phi}) \quad (48)$$

と表すことができます。一方、同じ Φ で加速された電子の曲率を比較するなら、(46) と (47) を直接用いて次

の関係が得られます。

$$\frac{\kappa_R(\Phi)}{\kappa_N(\Phi)} = \sqrt{\frac{\Phi}{\hat{\Phi}}} = \sqrt{\frac{2}{1+\gamma}} \leq 1 \quad (49)$$

ここで $\gamma = 1 + 2e\Phi$ ((23) 式) です。相対論を考慮した方が、磁場による軌道の曲がり方が小さくなる(曲率半径が大きくなる)わけです。上式はその比率を示します。

ここで、磁場中の具体的な電子の運動を考えてみましょう。一番簡単なのは、一様な磁場中の運動です。その磁場に直行する平面への射影成分だけを考えれば、これは円運動で、いわゆるサイクロトロン運動(cyclotron motion)と呼ばれるものです。この円運動の半径は曲率の逆数ですから、(46) と (47) から直ちに得られます。しかしここでは運動方程式から始めてみましょう。

まずニュートンの運動方程式は、半径 r の等速円運動にたいしての加速度の公式を用いれば $mv^2/r = evB$ となります。これから、非相対論近似における半径 r と角速度 $\omega = v/r$ が次のように求まります。

$$r_N = \frac{mv_N}{eB}, \quad \omega_N = \frac{eB}{m} \quad (50)$$

これらはそれぞれ、サイクロトロン半径、サイクロトロン角速度と呼ばれます。

次に、相対論的な場合は、いまは速度が一定なので γ は定数です。よって運動方程式は、ニュートンの運動方程式において単に $m \rightarrow \gamma m$ と置きかえるだけです。したがって上式から、

$$r_R = \frac{\gamma m v_R}{eB}, \quad \omega_R = \frac{eB}{\gamma m} \quad (51)$$

が得られます。速度を v_N と v_R で区別していますが、これはもちろん、速度を同一の加速電圧 Φ にたいして計算したときの値が両方で異なるからです。 r_N を (21) を用いて Φ の関数として表したものは、

$$r_N = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m}{e}} \Phi \quad (52)$$

となり、これは (46) の右辺の長さの逆数と一致します。 r_R は、上式で $\Phi \rightarrow \hat{\Phi}$ とすればいいわけです。

サイクロトロン半径の計算例を示しておきます。磁場を $B = 1 \text{ T}$ とすると、電子の加速電圧 $\Phi = 100 \text{ V}, 1 \text{ kV}, 10 \text{ kV}, 100 \text{ kV}$ にたいして、それぞれ $r_R = 0.03 \text{ mm}, 0.1 \text{ mm}, 0.3 \text{ mm}, 1.1 \text{ mm}$ となります。

(51) における r_R の分子は、相対論的な運動量であることがわかります。そこで、決まった e と m をもった荷電粒子を考えるなら、一様磁場中での運動半径を測定すればそれがそのまま運動量を表します。一様磁

場をエネルギーアナライザとして用いる場合、分散はエネルギーではなく運動量に比例するわけです。

次に角速度の方ですが、非相対論的な結果 ω_N は運動半径あるいは加速電圧に依らず、磁場が一定なら粒子の種類だけで決まります。この事実はサイクロトロン運動の同期性と呼ばれ、§2.5で磁界型レンズを解析する際に重要になります。ただし、 ω_R の方には加速電圧に依存する γ を含みますから、相対論的な効果が大きくなると同期性がくずれます。(サイクロトロン加速器はサイクロトロン運動の同期性を利用したものです。加速できるエネルギー値は同期性が保たれる範囲に限られます。)

さて、もう少し複雑な問題を考えます。ある人が、非相対論的な計算をもとにして「エネルギー $e\Phi$ で入射した電子のみが検出器に入るような装置」を設計したとします。(磁場だけを用いたものとしますが、磁場の分布は任意です。) 相対論の効果によって、エネルギー Φ の電子は設計思想に反して検出器には入らず、それとは別のエネルギー $e\Phi'$ をもった電子が検出器に入ることになるでしょう。この Φ' は何か? という問題を考えましょう。求める Φ' は、

$$\kappa_N(\Phi) = \kappa_R(\Phi') \quad (53)$$

をみたすものです。一方 (48) の関係は、 $\kappa_R(\Phi) = \kappa_N(\Phi')$ となる Φ' はなにか? という問題の答えが $\Phi' = \hat{\Phi} = \Phi(1 + \epsilon\Phi)$ であるということの意味します。これらの二つの問題は Φ と Φ' が逆です。そこで (53) をみたす Φ' は、 $\Phi = \Phi'(1 + \epsilon\Phi')$ を Φ' に関しての2次方程式として解けば得られます。答えを ϵ に関してべき展開すれば、次式のようになります。

$$\Phi' = \Phi - \epsilon\Phi^2 + 2\epsilon^2\Phi^3 - \dots \quad (54)$$

これは、磁場によってエネルギーアナライザを構成する場合の、エネルギー軸の補正式を与えることになります。

さて、電子顕微鏡の場合は、加速電圧は大きくても数 MeV の程度です。これは高エネルギー物理の研究で用いられる加速器に比べれば小さいものですが、相対論的な効果を見逃すことができない領域です。一方、通常の電子分光においては、分析する電子のエネルギーはせいぜい数 keV ですから、軌道を計算してみても目で見てはっきり分かるような違いはでません。しかし、分析エネルギーの絶対値を問題にする場合は別で、測定可能な有意の差が出ます。(エネルギースペクトルの絶対測定に関しては、本誌の後藤先生の連載をご覧ください。相対論補正の必要性は [4] で述べられています。)

相対論的な効果の程度を知るには、 Φ と $\hat{\Phi}$ の大きさを比べてみれば十分でしょう。両者の関係で ϵ に数値を代入すれば、

$$\hat{\Phi} = \Phi(1 + 0.9785 \times 10^{-6}\Phi) \quad (55)$$

となります。そこで $\Phi = 1$ kV, 10 kV, 100 kV, 1000 kV にたいしての補正值 $\hat{\Phi}$ はそれぞれ、1.001 kV, 10.1 kV, 110 kV, 2000 kV となります。1 kV のときの補正による変化分が 1 eV ですから、電子分光において無視できる大きさではありません。

2.4.2 電場中の軌道にたいしての補正

電場中での軌道方程式は、非相対論的には

$$u' = \frac{1}{2\Phi} [\nabla\Phi - (\nabla\Phi \cdot u)u] \quad (56)$$

で与えられ、相対論的な場合は

$$u' = \frac{1}{2\hat{\Phi}} [\nabla\hat{\Phi} - (\nabla\hat{\Phi} \cdot u)u] \quad (57)$$

です。 $\Phi(r)$ を $\hat{\Phi}(r)$ で置きかえれば相対論補正は済むわけですが、磁場のときと違ってこれらは定数ではありません。

まず、ある一点における電子の曲率を比べます。これは次のように計算できます。

$$\begin{aligned} \kappa_R(\Phi) &= \frac{1}{2\Phi} |\nabla\hat{\Phi} - (\nabla\hat{\Phi} \cdot u)u| \\ &= \frac{1}{(1+\gamma)\hat{\Phi}} |\gamma\nabla\Phi - (\gamma\nabla\Phi \cdot u)u| \\ &= \frac{1}{2\hat{\Phi}} |\nabla\Phi - (\nabla\Phi \cdot u)u| \cdot \frac{2\gamma}{1+\gamma} \end{aligned} \quad (58)$$

すなわち、

$$\frac{\kappa_R(\Phi)}{\kappa_N(\Phi)} = \frac{2\gamma}{1+\gamma} \geq 1 \quad (59)$$

です。ここで $\gamma = \gamma(r) = 1 + 2\epsilon\Phi(r)$ です。相対論補正は、軌道を強く曲げる方向に働くことがわかります。(相対論的な効果によって質量が増すので曲げられにくくなる、と考えてはなりません。ある加速ポテンシャルにたいして計算した速度は相対論の場合の方が小さくなり、これだけを考えるなら曲げられやすくなります。後者の効果が勝つわけです。)

ここで、磁場のときと同様に、電場を用いたアナライザのエネルギー補正を考えてみましょう。対応する問題は次のようになります。まず装置にエネルギー $e\Phi_0$ で入射した電子の非相対論的な軌道を考えます。相対

論的に正しく計算した軌道がそれと同一になるような入射エネルギー $e\Phi_0$ は何か?

この問題を考えるために、§2.2.2で行なったように $\Phi(r)$ を次のように分けて考えます。

$$\Phi(r) = \Phi_0 + V(r) \quad (60)$$

ここで $V(r)$ は装置のつくる電位分布で、ここでは固定して考えなければなりません。ここでの問題は、 $\Phi_0 + V(r)$ の中で非相対論的な軌道と、 $\Phi_0 + V(r)$ の中で相対論的な軌道を一致させることができるか? ということです。

しかしこれは不可能です。同じ $\Phi(r)$ にたいしての電子の非相対論的な曲率と相対論的な曲率のあいだには (59) の関係があり、これは場所ごとに異なります。したがって、 $\Phi(r)$ の定数分だけではなく関数形自体を補正しないかぎり、軌道に沿っての曲率を完全に一致させることはできません。

しかし例外として、電子軌道上でほぼ Φ が一定値と見なされるなら、 Φ_0 にたいしての補正式を得ることができます。これは必ずしも電場が弱い場合だけではなく、電場はあるけれども電子の加減速がないとき、たとえば電子がつねに軌道に直行する力をうけて円運動するような場合なら適用できます。トロイダル型エネルギーアナライザ、たとえば静電半球型アナライザ (CHA: Concentric Hemispherical Analyzer) の中心軌道にたいしては、そのような扱いが許されます。軌道に沿っての Φ の変化が無視できる場合、磁場の場合と同様の計算によって、 Φ_0 にたいしての次の補正式を得ることができます。

$$\Phi'_0 = \Phi_0 + \epsilon\Phi_0^2 - \epsilon^3\Phi_0^4 + \dots \quad (61)$$

もし途中で減速されてまたもとのエネルギーにもどるような場合、たとえば円筒鏡面型アナライザ (CMA: Cylindrical Mirror Analyzer) においては、途中で減速される分だけ補正の効果は (61) よりも小さくなります。(加速を伴う装置ならその逆ですが、加速することはエネルギー分散の減少を伴うので、ふつうはそのようなアナライザは用いられません。) そのような装置にたいしては定性的な傾向が言えるだけで、(61) に対応する補正公式を与えることはできません。

そのような場合には、電場分布を適当にモデル化して相対論的な軌道を解析的に求め、相対論的效果による軌道のずれの表式を導く必要があります [5][6]。ただし、軌道を数値的に解くのであれば、(56) と (57) を別々に解いて比較すればいいわけですから、難しいところはありません。

2.4.3 Φ の相対論補正の意味について

以上で見てきたように、相対論的な効果は、もし軌道のかたちのみを問題にするなら、加速ポテンシャル $\Phi(r)$ を $\hat{\Phi}(r)$ で置きかえるだけのものです。その証明は §2.3.3 における計算で済んでいるわけですが、計算してみたらそうだったというだけで、なにか必然性というものが感じられません。補正がそのような簡単な操作で済むからには、もつとなにか深い理由がありそうです。

電磁場中の電子の運動を決定するものが運動方程式ですが、そこから時間を消去して軌道方程式を導く過程で、相対論補正のための規則が見出されました。しかしそのような順序ではなく、軌道そのものを決定する第一原理をまず導くことができれば、補正方法はより納得しやすいものになるはずです。

これは変分原理の形式を用いて行なわれます。正式な議論は次回のテーマになりますが、要点だけをここで述べておくことにします。まず、運動方程式を変分原理の形式に書き直します。前章で述べたように、そのような形式で表された運動法則は、時空間における曲線の形状を時間の経過を追うことなしに決定するものです。そこで、もし時間が本質的でない場合、つまり場が時間によらない場合は、時間を無視して曲線の空間成分だけがみたす法則を得ることができます。

その結果が最小作用の原理であり、電磁場中の二点 A, B を通る電子軌道を決定する原理が次のように与えられます。

$$\delta \int_A^B \mathbf{p}(r) \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (62)$$

ここで $\mathbf{p}$ は正準運動量 (canonical momentum) と呼ばれるもので、前節までにおいて運動量と呼んでいたものに、さらに磁場のベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) の項を加えて

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} - e\mathbf{A} \quad (63)$$

で定義されます。前節までの運動量は「力学的な運動量」としてたとえば $\mathbf{p}_k$ のように表すのがいいのですが、ここでは同じ記号を用います。上の原理が示すことは、電子軌道を決定するものが正準運動量であるということです。(電子軌道を変分原理の形式で与えるものを正準運動量と呼ぶ、と考えるほうがよいかも知れません。)

(62) における $\mathbf{p}$ は、これを場所の関数として書いたものでなければなりません。(21) と (25) を用いれば、

非相対論的な場合と相対論的な場合はそれぞれ

$$\left\{ \begin{array}{l} p_N(\mathbf{r}) = m\mathbf{v}_N(\mathbf{r}) - e\mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ \quad = \sqrt{2me\Phi(\mathbf{r})}\mathbf{u} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ p_R(\mathbf{r}) = m\gamma(\mathbf{r})\mathbf{v}_R(\mathbf{r}) - e\mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ \quad = \sqrt{2me\hat{\Phi}(\mathbf{r})}\mathbf{u} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}) \end{array} \right. \quad (64)$$

となります。両者の違いは、 $\Phi(\mathbf{r})$ と $\hat{\Phi}(\mathbf{r})$ の違いだけです。つまり正準運動量にたいしての相対論補正が、すなわち軌道にたいしての相対論補正であり、それが $\Phi(\mathbf{r})$ を $\hat{\Phi}(\mathbf{r})$ に入れかえることであったわけです。

もし磁場が存在しない場合は、(62) を非相対論的な場合について書けば、

$$\delta \int_A^B \sqrt{2me\Phi(\mathbf{r})} ds = 0 \quad (65)$$

となり、フェルマーの原理と同じかたちになります。すなわち、上式の被積分関数が屈折率分布 $n(\mathbf{r})$ に対応します。上式においては、 m と e が軌道の変分に寄与しません。これは、静電レンズ中の軌道がこれらの定数に影響されないという事実を直接的に示します。(前章で最小作用の原理を紹介した際には、 m と e を省いて記しました。) また上式は、 $\Phi(\mathbf{r}) \rightarrow \hat{\Phi}(\mathbf{r})$ とすれば相対論的な式になりますから、相対論の効果によって屈折率が見かけ上大くなり、それによって軌道の曲がり方が非相対論的な場合よりも大きくなるわけです。

もし磁場があると、屈折率に相当する関数は存在しなくなります。磁場中の電子の運動は、サイクロトロン運動に起因する「ねじれ」を伴うもので、光学ではこれに正確に対応するものはありません。電子軌道の研究にとっては最小作用の原理 (62) の存在がすべてであり、ことさら光学との対応を追及する必要はありません。しかし幸いにして、磁場を用いたレンズでも、うまく座標系を変換すれば光学レンズと同じ作用をもつものとして扱えるのです。これを次節で述べることにします。

2.5 磁場のレンズ作用

静電型の電子レンズが光学レンズと同じ作用をもつのにたいし、磁界型レンズはそのような直接的な対応がありません。しかしその一方、磁界型レンズは静電レンズよりも動作の解析がしやすいという面もあります。それは、一様な磁場分布がレンズ作用をもち、したがって解析的な扱いができるという理由によります。一方、一様な電場はレンズとしては働きま

せん。(正確に言えば、一様な加速場は凸レンズとして扱うことができますが、虚像しか生成されず実像はつくられません。詳しくは後章で述べます。)

この節では、まず一様磁場中の電子の運動を詳しく調べます。前節では時間を消去することの重要性を強調しましたが、ここでは時間の関数としての電子の運動、とくにサイクロトロン運動の同期性が重要な役割を果たします。そこで、この節ではほとんど時間をパラメタとした議論を行ないます。また、ここでは具体的な計算は非相対論的な場合だけに限ります。(なお、「磁界」型レンズと言ったり「磁場」分布と言ったりしますが、慣例なのでそのまま使うことにします。)

2.5.1 絞りの役割

磁場の作用を述べるための準備として、絞りに関しての用語の説明を先にしておきます。最初に光の場合を考えます。Fig.2 のように XYZ 座標をとって、 Z 軸(光軸)のまわりに軸対称な屈折率分布があるとしします。(このような系は静電レンズに対応するのでしたから、以下の言葉使いは静電レンズ中の電子軌道にたいしても同じものが用いられます。) 本章の最初でも述べましたが、物面の一点から出る光線をすべて結像に参加させてしまうと収差によって像がボケてしまうので、レンズ系の途中に絞りを入れて角度を制限します。図では、 X 軸上のどこかに点光源 P_0 を置いたとして、その光源から全方向に出る光線のうち、特定の射出条件をもつ光線だけが絞りを通過する様子を示しています。

図において、 P_0 を出て XZ 平面上にのる光線、たとえば点 A 、点 B を通るような光線をメリディオナル光線 (meridional ray) あるいは子午的光線と呼びます。すなわち、光軸を含む面内にある光線、あるいは光軸とどこかで交わる光線がメリディオナル光線ということです。ある一点から出たメリディオナル光線のうち、絞りの中央を通るものはとくに主光線 (principal ray) と呼ばれます。メリディオナル光線以外の、光軸と交わらないものはスキュー光線 (skew ray) と呼びます。(skew は「斜めの」とか「ゆがんだ」という意味です。) ふつう光学レンズ系の光線図を描く際は、平面上での 2 次元的な表示しかしません。これはメリディオナル光線だけを描いていることになります。実際には、その平面からはみ出したスキュー光線が存在することを忘れてはなりません。

もし光軸に関して軸対称な磁場が同時に存在したとすれば、その中で電子の運動はどんなものであれ、

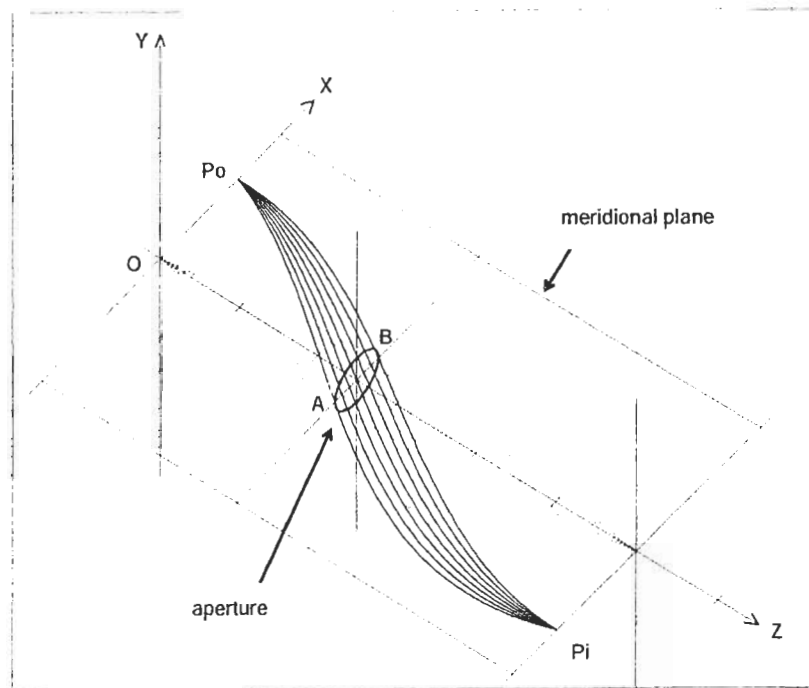


Fig. 2: Illustrating the role of an aperture.

回転,あるいはねじれを伴うようなものです。その場合は,図のメリディオナル光線のようなものは存在しなくなります。しかし,磁場が存在する場合でも,図に示されているような光学レンズに対応する作用と,ねじれ的作用を分離して考えることができます。すなわち磁界型レンズは,光学的なレンズ作用と,像を全体的に回転させる作用を同時に持つものとして扱えるのです。このことを以下で詳しく述べていきます。

2.5.2 ラーモア座標系

一様磁場中の電子のサイクロトロン運動に関しては§2.4.1で述べましたが,ここで改めて議論しておきます。磁場中の電子の運動方程式は,

$$m\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (66)$$

です。磁場は,Z方向を向いて強度が一定の一様分布であるとして,その大きさを B で表し,電子の運動は XY 平面上に拘束されていると仮定してしばらく話を進めます。そのときの X, Y 座標に関する運動方程式は,次のようになります。

$$\begin{cases} m\ddot{X} = -eB\dot{Y} \\ m\ddot{Y} = eB\dot{X} \end{cases} \quad (67)$$

この解がサイクロトロン運動であり,サイクロトロン半径 r_c と角周波数 ω_c は次のように与えられます。(この節ではすべて非相対論的な扱いなので, N の添え字はつけません。)

$$r_c = \frac{mv}{eB}, \quad \omega_c = \frac{eB}{m} \quad (68)$$

さて(67)では, X 座標と Y 座標が分離せずに,互いに関連しあった関係になっています。これは磁場による回転の作用に他なりません。この作用の性質を調べるために,(67)を回転座標系から見たものに変換してみます。固定座標系 XY と原点を共有し,一定の角速度 ω で回転する座標系 xy を考えると,二つの座標系の関係は次のようになります。

$$\begin{cases} X = x \cos \omega t - y \sin \omega t \\ Y = x \sin \omega t + y \cos \omega t \end{cases} \quad (69)$$

この変換式を用いて,まず(67)で磁場のないとき,すなわち電子がただ直線運動するだけの系を回転座標系に変換してみると次のようになります。

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y} + m\omega^2x \\ m\ddot{y} = -2m\omega\dot{x} + m\omega^2y \end{cases} \quad (70)$$

上の二つの式において,右辺の第一項はコリオリの力 (Coriolis force),第二項は遠心力 (centrifugal force) と

呼ばれるもので、いずれも非慣性系であることから生じる見かけの力です。このうち、コリオリの力は (67) の右辺と同じ形をしていることがわかるでしょう。そこで、うまく ω の値を選べば、(67) の右辺を打ち消せそうに見えます。

これを試してみましょう。(67) を回転座標系に変換すると次のようになります。

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2m\left(\omega - \frac{eB}{2m}\right)\dot{y} + m\omega\left(\omega - \frac{eB}{m}\right)x \\ m\ddot{y} = -2m\left(\omega - \frac{eB}{2m}\right)\dot{x} + m\omega\left(\omega - \frac{eB}{m}\right)y \end{cases} \quad (71)$$

そこで、 ω として

$$\omega_L = \frac{eB}{2m} \quad (72)$$

を用いれば、コリオリの力に対応していた部分は消えることがわかります。そのときの運動方程式は次のようになります。

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_L^2 x \\ \ddot{y} = -\omega_L^2 y \end{cases} \quad (73)$$

これによって、磁場による回転作用に起因する項は消えて、原点に向かう引力が残ることがわかります。(72) の ω_L はラーモア角速度 (Larmor angular velocity)、この角速度で回転する座標系はラーモア座標系 (Larmor frame) と呼ばれます。

(73) では x 座標と y 座標が独立になり、いずれも単振動の方程式となっています。すなわちこれは、2次元の調和振動子の方程式に他なりません。この解は一般には楕円運動で、その特別な場合として、原点を通る直線に沿った単振動、および原点を中心とする円運動が可能です。このような運動はいずれも、原点に向かう、原点からの距離に比例した引力に起因するものです。光軸としての Z 軸を付け加えて3次元で考えるなら、これは光軸に向かって電子を集束させようとするレンズ作用に他なりません。つまり、ラーモア座標系の回転運動と、その座標系から見たときのレンズ作用に分離して考えることが可能なのです。

ここで言っている「原点に向かう力」はもちろん見かけの力で、回転座標系であることで生じる遠心力と、磁場の作用をそのような系から見ることで生じる同じ形をした力を合わせたものです。磁場は一様と仮定しているので、原点と呼ぶべき特別な点は、本来は存在しないことに注意しましょう。すなわち、サイクロトロン運動はどんな点のまわりでも可能で、原点は任意に選ばれたものです。任意に選んだ原点を中心と

した回転座標系に移ることで、磁場によるねじれの効果が消えてしまうのです。

ラーモア角速度 ω_L が重要な役割を果たすことがわかりましたが、これは (68) のサイクロトロン角速度 ω_c の $1/2$ で、両者は同じではありません。もし原点を中心とした任意半径のサイクロトロン運動を考えるなら、 ω_c で回転する座標系で眺めるのが一番いいのは当然です。そのような座標系ではなく、その $1/2$ の角速度をもつ座標系が現れる理由は何でしょうか？

試しに、(71) において $\omega = \omega_c$ とおいてみると次式になります。

$$\begin{cases} m\ddot{x} = eB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -eB\dot{x} \end{cases} \quad (74)$$

今度は遠心力の項が消えてコリオリの力の項が残るわけですが、これはもとの (67) のかたちに戻るだけで、何もご利益がありません。(67) と符号が逆になっているので、磁場の向きが見かけ上反転したことになります。) この回転座標系においては、ある時刻に静止している電子はそのまま静止を続けるわけですが、これを固定座標系 XY から見れば、原点を中心に回転する電子であるわけです。

では、ラーモア座標系から見て電子の運動がどのように見えるのかを調べてみましょう。まず原点以外を中心とするサイクロトロン運動を考え、これをラーモア座標系で見るとどうなるかを計算してみます。原点を出発点として、 X 方向に初速を与えたときの運動を考えると、Fig.3 のようになります。

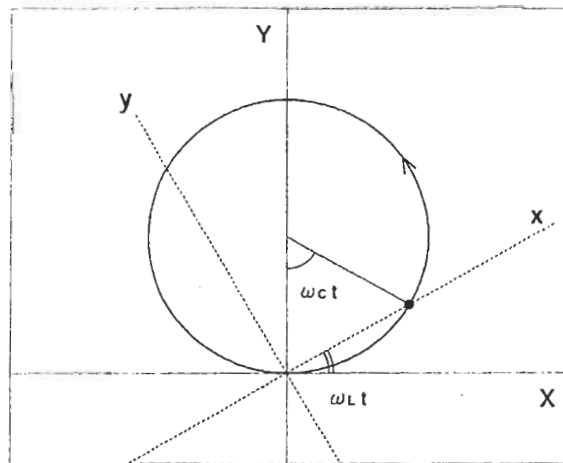


Fig. 3: Cycotron motion of an electron in a uniform magnetic field.

この運動は、式で表せば

$$\begin{cases} X = r_c \sin \omega_c t \\ Y = r_c (1 - \cos \omega_c t) \end{cases} \quad (75)$$

ですから、 OX 軸から測った電子の位置の角度を $\varphi(t)$ とすれば

$$\tan \varphi(t) = \frac{Y}{X} = \frac{1 - \cos \omega_c t}{\sin \omega_c t} = \tan \frac{\omega_c}{2} t = \tan \omega_L t \quad (76)$$

となります。そこで、角速度 ω_L で回転する座標系 xy 、すなわちラーモア座標系から見ると、電子は原点から出発してまず x の正方向に向かい、途中で静止してから、折り返して原点に戻ってきます。そのときは xy 系は 180° 回転しているので、今度は x の負の方向に向かって、また戻る。すなわち、電子は x 軸にのったまま、原点の周りを行きつ戻りつを繰り返します。これが実は単振動であることは、先の結果 (73) が示しています。この単振動の一周期が、サイクロトロン運動の 2 回転分であることに注意しましょう。

Fig.4 は、原点から X 方向にいろいろな大きさの初速 v_X を与えた場合の運動を示しています。 $v_X > 0$ のときが上半面、 $v_X < 0$ のときが下半面の軌道となります。サイクロトロン角速度は初期条件に依らず一定ですから、どの電子も x 軸を単振動しながら、同じ時刻に原点に戻ってきます。

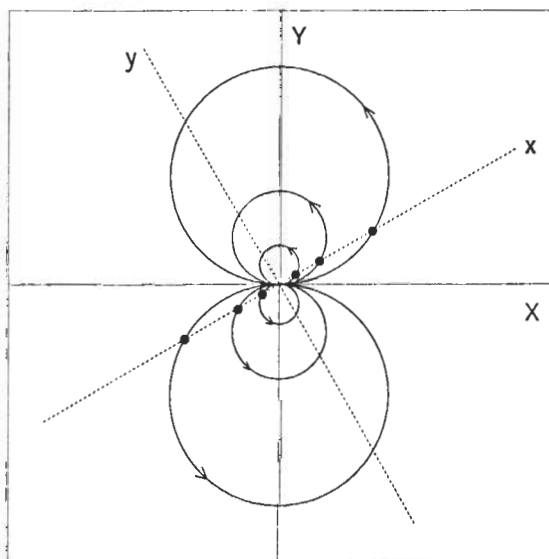


Fig. 4: Cycrotron motion of the electrons with several initial velocities v_X .

次に、原点以外の点から出た電子の場合も考えてみましょう。Fig.5 は、原点から離れた X 軸上の点から出た電子をいくつか計算したものです。実線が固定座標

系 XY からみた運動、点線はラーモア座標系 xy から見たものです。このときは先の場合と違って、電子は x 軸上を振動するというにはなりません。電子は XY 系から見れば、出発点を始点とした円運動をするのですが、これをラーモア座標系から見ると、原点まわりの大きな楕円運動となります。これも、原点に向かう引力で説明できることがわかるでしょう。このように、任意の点のまわりのサイクロトロン運動は、ラーモア座標系で見れば原点まわりの 2 次元的な調和振動となるわけです。

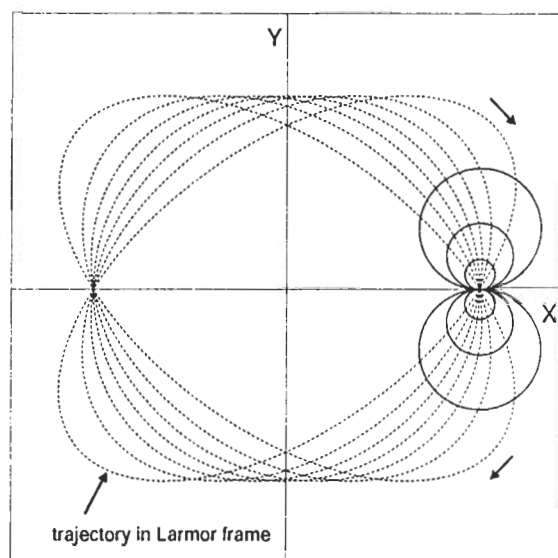


Fig. 5: Cycrotron motion viewed from a laboratory frame XY and a Larmor frame xy .

2.5.3 軸上光源にたいしての作用

今までは電子は XY 平面上に拘束されているとしていましたが、ここで Z 方向の運動も許してみます。(これでやっとならびとしてのはなしになります。 Z 軸が光軸です。) この場合、磁場は電子の運動の Z 成分には何の影響も与えないので、この方向には単なる等速運動となります。そこで、 Z 方向の速度 v_Z を共通にして X 方向にいろいろな初速で電子を放出すれば、これらはすべて同じ時刻に同じ位置の Z 軸上に戻ってくるようになります。

原点から出た電子に関しては Fig. 6 のようになります。すべての電子は、ラーモア座標の y は 0 のままで、 xZ 平面から離れずに運動し、すべて光軸上の同一点にフォーカスします。これはレンズとして最初に期待される動作です。 Z 軸に戻るのが同一の Z 座標の点であることは、サイクロトロン運動の同期性と、 Z 方向

の速度 v_z が共通であると仮定していることからの帰結です。

さて, Fig.6においては, 電子の初速, あるいは運動エネルギーは同じではないことに注意する必要があります。すなわち, すべての電子は出発点で同じ v_z を持つという仮定があり, かつ v_x はまちまちですから, エネルギーがそろっていないのです。エネルギーをそろえようとすれば, v_x の値ごとに v_z も変えて, $v_x^2 + v_z^2$ を一定にしなければなりません。この場合は, すべての電子は, サイクロトロン運動の同期性によって同じ時刻に Z 軸に戻っては来ますが, そのときの Z 座標は同一ではなく, まちまちです。この様子は Fig.7 のようになります。この際にラーモア座標系で見た運動は, 出射角の大きな電子ほど手前で Z 軸と交わってしまいます。これは, 初速の X 成分が大きくなるほど Z 成分は小さくなるからです。

この現象は, 前章で述べた球面収差に他なりません。つまり, 一様磁場からなるレンズは球面収差を持つということです。(球面収差はエネルギーのそろった単色ビームにたいしての概念です。) もし単色ではなく, 一点に集束させたときに Z 方向の速度が揃っているようなビームにたいしては, Fig.6 のようになるわけですから, ボケは生じません。(この事実は何らかの応用が考えられていいと思うのですが, 試みられた例を知りません。)

前章で, 球面収差の符号を定義しました。今の場合のように, 物面を大きな角度で出た電子ほど手前で光軸と交わる時に, 球面収差は正です。もし磁場を一様磁場から少々ゆがめたとしても, 球面収差の符号を反転させるのは容易ではないことが想像できるでしょう。これに関しては §2.5.5 で改めて述べます。

次に, ビームのエネルギー幅の影響を考えます。電子顕微鏡においては, 電子ビームはほとんど単色と見なせます。しかし, 電子顕微鏡は原子の大きさ程度の分解能を問題にするので, ほんのわずかのエネルギー幅でも効いてくる可能性があります。かりに, 球面収差は何らかの方法で補正できるとしましょう。エネルギー幅が存在する状況をつくるために, v_z と v_x にある幅をもたせて考えます。すると, v_z がばらつく結果として, フォーカス位置が光軸上の前後に散らばることになります。すなわち, 電子ビームがエネルギー幅を持っていたとすれば, 1 点に集束するはずのビームにボケが生じます。これが, 色収差に他なりません。 v_z が大きいほど光軸の遠い場所で交わり, 前章の定義で言うなら, これは正の色収差です。

結局, 球面収差も色収差も, ビームを構成する電子の

v_z が共通でないことから生じる現象であるわけです。

2.5.4 軸外光源にたいしての作用

次に考えるべきことは, 軸外光源の場合です。固定座標系で見るなら軸上でも軸外でも本質的に何も区別するところはありません。速度の初期条件が同じなら, ただ出発点がずれた分だけシフトするだけです。すなわち, Fig.8 のようになります。この図では運動エネルギーを一定としています。この図の状況をふつう, 「電子は磁力線に巻きつく」という言い方をするわけです。

この状況はしかし, レンズ作用としてはかなり不自然です。もしレンズであれば, 平行に入射したビームはどこかに焦点を結ぶはずですが, 今の場合, 光軸に平行な初速をもつ電子はそのまま素通りしてしまって何の作用も受けません。しかし, たとえば原点を含む XY 平面に面光源を置き, この面上の各点から決まったエネルギーの電子が等方的に放出されている状況を考えると, 光源上の強度分布に対応した像がちゃんと形成されます。球面収差によってボケはしますが, 光源上のすべての点は平等なので, 軸外収差は存在せず, その意味では通常のレンズよりも優秀です。

一様磁場は, このように結像作用はあるものの, 通常のレンズとはかなりちがった印象を受けます。しかし光学レンズ系でも, もしその働きをブラックボックスとして考えるなら, 上と同様の作用を持たせることが可能です。すなわち, 光軸に平行に入射したビームはレンズ系を通過したのち最終的にふたたび平行ビームとして出射し, しかも全体的にレンズとしての結像作用をもつようにすることは可能です。したがって, 光学的に見て一様磁場の働きそのものは例外的なわけではありません。

この一様磁場のレンズは倍率が 1 で拡大も縮小もできないので, 用途が無いように思えるかもしれません。しかし, もし一様磁場によって面光源上の状態をそのまま他の場所に移動できるとすれば, 電子光学系において非常に重要な役割を持たせることができます。すなわち, 電子光学装置で調べる対象となる試料には, その近傍に強い電場をかけてはならないとか, 試料のできるだけ近くに何かの検出器を配置したいなどの制約があるのが普通です。もし試料面での電子ビームの状態をそのまま保って別の場所に移動できるなら, そこでは場所の制約なしにサイズの大きなレンズ系でも配置できて, また必要なら強電場で加速するなどの, 自由な処置が許されます。

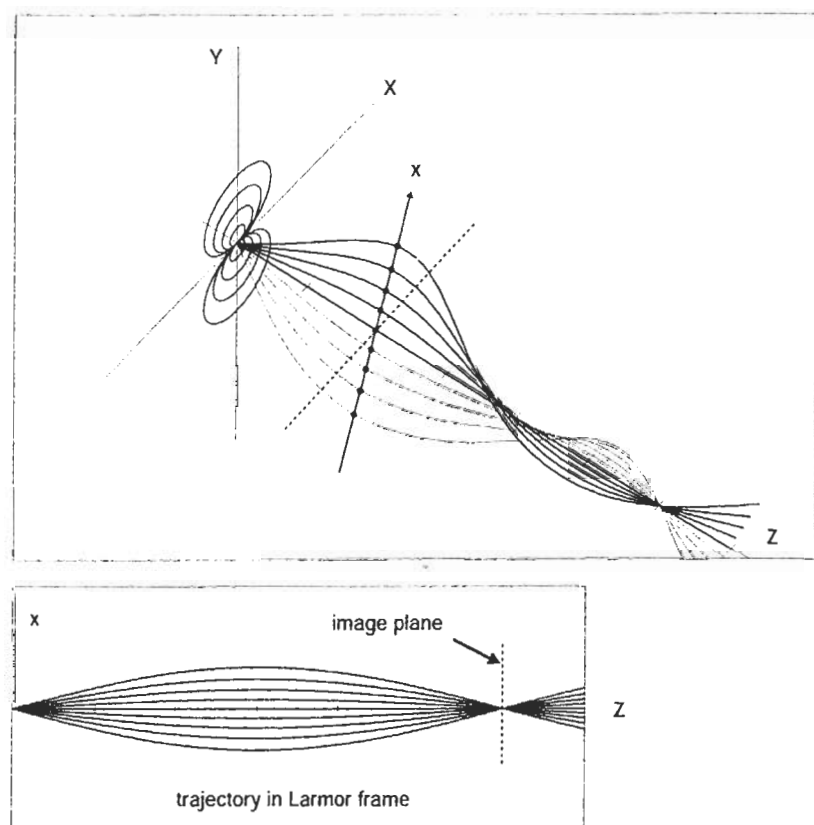


Fig. 6: Lens action of a uniform magnetic field for the trajectories with the same v_z .

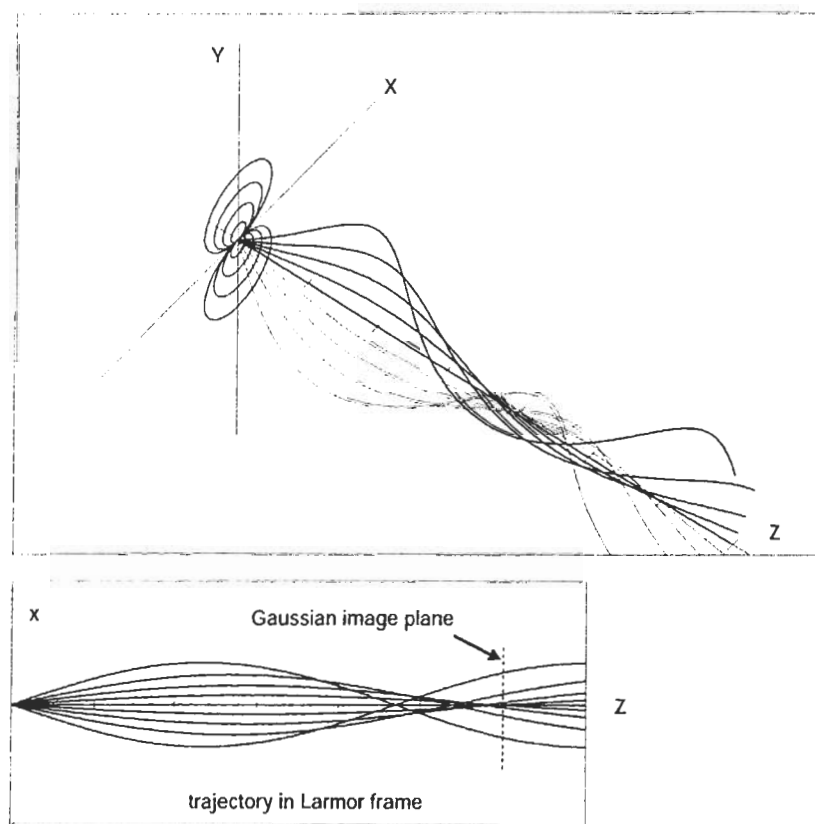


Fig. 7: Spherical aberration of a uniform magnetic field for a monochromatic electron beam.

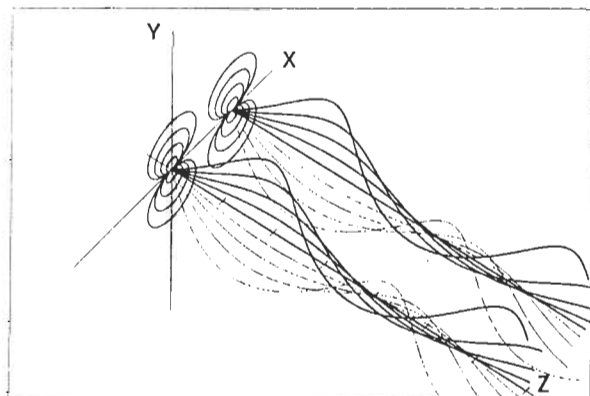


Fig. 8: Spiral motion of electrons from an on-axis and off-axis point.

しかし、一様磁場にそのような役割をさせようとする際の問題は、球面収差の存在です。通常のレンズ系においては、球面収差による像のボケを抑えるためにどこかに絞りを入れて、電子の物面での出射角を制限します。そこで、もし Fig.8 において、光軸上のどこかに Z 軸を中心とした絞りを置くとどうなるでしょうか。この場合、軸上から出た電子は適当に出射角が制限されて、絞りの径を調整すれば球面収差によるボケを必要な大きさまで抑えることができます。しかし軸外から出た電子は、ただ光軸から離れた場所ですら運動をするだけですから、絞りを通過できません。

光軸から電子までの距離は、回転座標系から見ても変わるわけではありません。よって、たとえラーモア座標系から見たとしても、軸外から出たビームが絞りを通過できないという状況は変わりません。軸外から出た電子の XY 平面上でのサイクロトロン運動をラーモア座標系で見たときの運動は、すでに Fig.5 で示しています。これらはすべて原点を通ることがなく、 Z 方向の等速運動を重ねてレンズとして見る場合でも、光軸と交わることはありません。

光軸から離れた場所ですら運動する電子は、光軸とは交わらない、先に述べたスキュー光線に対応します。軸上の光源にたいしては、ラーモア座標系でみれば普通のレンズとして扱えるわけですから、ラーモア座標系でみた xZ 平面（固定座標系から見れば Z 方向に進むにつれて振れていくような曲面）を、今の系でのメリディオナル面と見なすことが出来るでしょう。これをラーモア面 (Larmor surface) と呼ぶことにします。

そこで、軸外の一点から出て、ラーモア面にのるよ

うな電子を考えるべきということになります。つまり、絞りの使用を前提とする以上、絞りを通れるような出射条件を探して、その条件のもとで考えなければならぬということです。（もちろん、電子はすべての方向に放出されることを前提とします。）厳密に言えば、光軸と交わるものと絞りを通過することは同じではありませんが、両者が近い条件であることは確かなので、ここでは同じとして考えます。

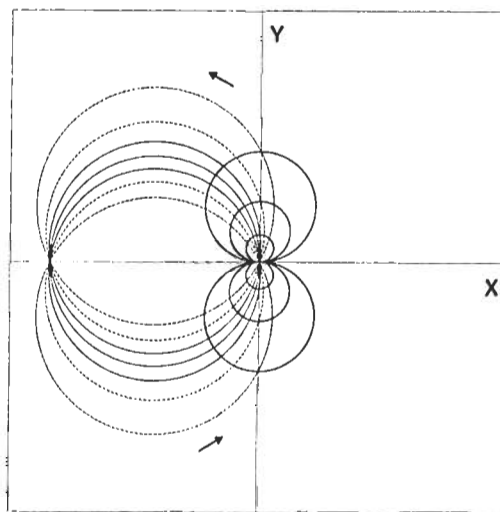


Fig. 9: Cycotron motion when a common v_Y is added for all electrons.

軸外光源の位置を $X = x = x_0$ とすれば、この位置でのラーモア面の回転速度は $x_0\omega_L$ ですから、ラーモア面にのるためには、初速の Y 成分を $v_Y = x_0\omega_L$ ととればいいはずです。出発点で与える初速に、この Y 方向成分を「上（うわ）のせ」させればいいということです。

これを確かめてみましょう。まず準備として、原点を出発点として X 方向のみに初期速度を与えた場合と、共通の v_Y を上のせしたときの運動の変化を XY 平面上で計算してみると、Fig.9 のようになります。 v_Y 成分をもつことで、原点から出る電子はすべて Y の正方向に向かって運動をはじめ、原点ではなく X 軸上の別の点で一度集まります。よって軸外光源にたいしては、その位置に応じてうまく v_Y を選んでやれば、光軸と交わらせることができることがわかります。

軸外光源に関して、 $v_Y = x_0\omega_L$ という成分を与えたときの運動の様子を Fig.10 に示します。この図では、 v_Z は共通にとってあるので、同期性によって、すべての電子は同じ Z の位置でもとの X 座標にフォーカスし、球面収差は発生しません。

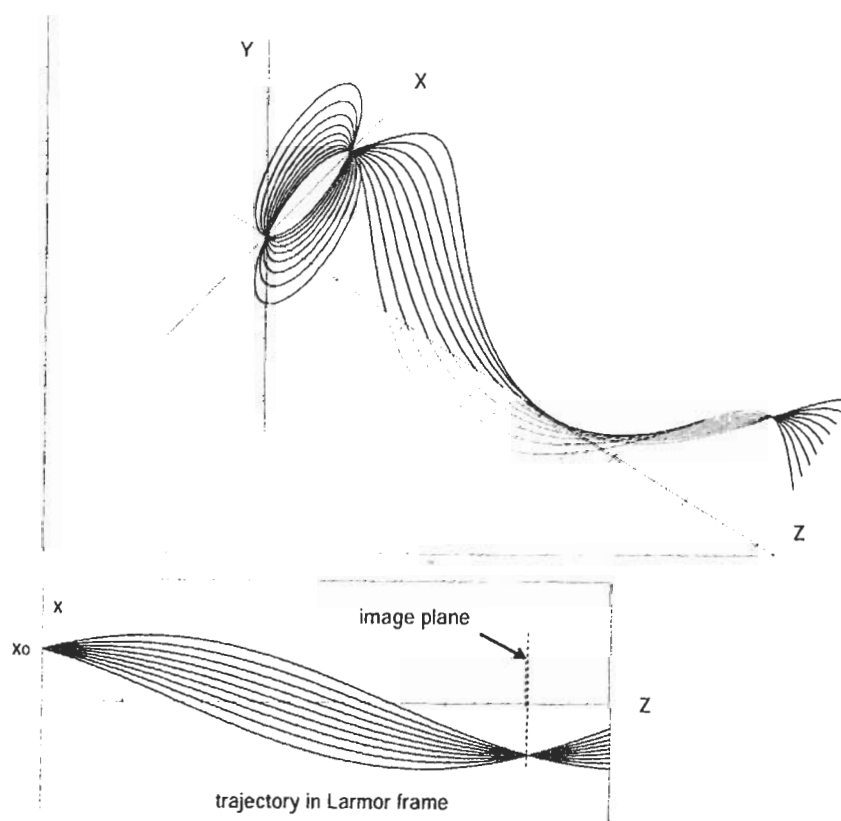


Fig. 10: Off-axis trajectories with the same v_y for riding on a Larmor surface.

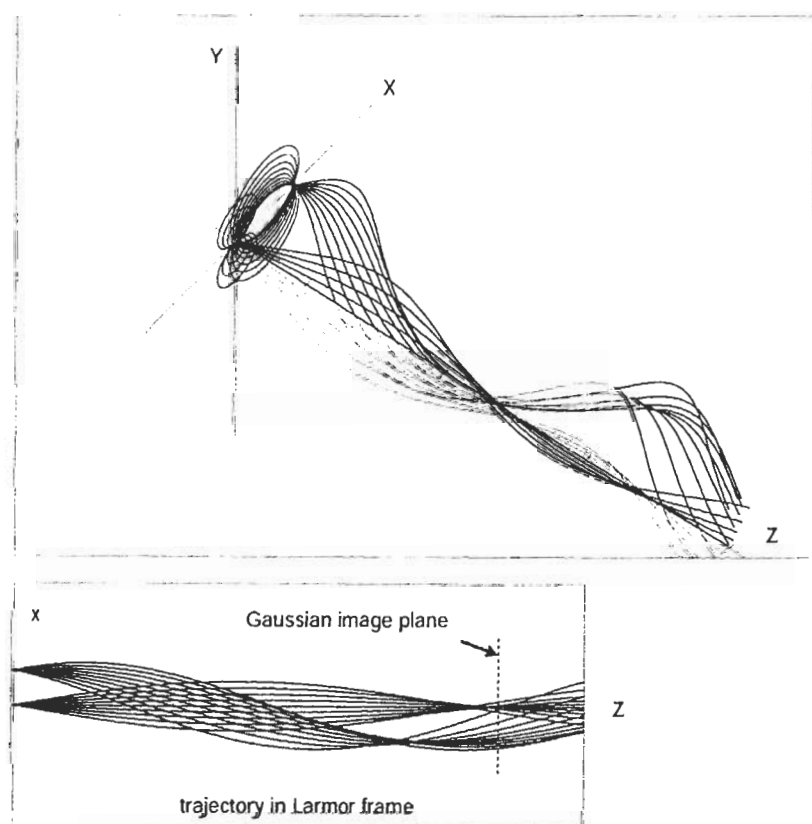


Fig. 11: Off-axis aberration for a monochromatic electron beam.

もしエネルギーをそろえて考える場合は、 $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ を一定にしなければなりません。光源が軸外に離れていくほど、ラーモア面にのせるための v_y を大きくしなければならず、その分だけ v_z の「分け前」が減ってしまいます。(出射角を指定するための v_x は、つねに共通にとります。)

軸上光源の場合は、出射角がふえて v_x が大きくなるほど v_z の分け前が減って、それが球面収差を発生させるわけですが、軸外光源では、絞りを通過できるように v_y を上のせさせるので、さらに v_z が減ってしまいます。そこで周期性によって、軸外ほど z の小さい場所でビームが集まることになります。この様子を Fig.11 に示します。その集まる場所でのボケは、軸上光源の場合と同程度ですが、これを軸上光源からのビームで定義した像面、つまりガウス像面におけるボケで見ると、軸上光源よりも大きくなってしまいます。これはすなわち軸外収差です。

この図をみると、光源が光軸から離れるにつれて軸外収差が急激に増えることがわかりますが、実際にどれくらい軸外の光源まで問題にすべきかは用途によります。電子顕微鏡では、分解能が高くなるほど、試料上での視野の広さは狭くなります。原子を見るような分解能では、見ている範囲は nm のオーダーなので、ほとんど光軸上だけを見ていてと考えてよく、軸外収差が目に見えて影響することはありません。しかし視野径が 1mm 程度の低倍条件になると、大きな影響がでてきます。

なお、ここでの議論では、軸外から出て絞りを通過できるための条件を、光軸と交わることでできる条件で置きかえて考えました。本来は、収差の影響のもとで絞りを通過できるための初期条件を正確に決定した上で、像面での軸外収差を計算すべきです。また、§ 2.4.1 で述べたように、相対論的なエネルギーにたいしてはサイクロトロン運動の同期性がくずれます。しかしこれによってレンズとしての本質的な作用が変わることはなく、フォーカス位置や収差の大きさが相対論補正をうけます。

一様磁場のレンズ作用についての要点を、簡単にまとめておきます。

(1) 一様磁場の作用は、その中で電子が行なうサイクロトロン運動の同期性、つまり円運動の周期が半径に依らないことが本質的である。

(2) 角速度 $\omega_L = eB/2m$ で光軸まわりに回転するラーモア座標系から見ると、一様磁場は光学レンズと同じ作用をもつ。

(3) 光軸上の点光源から放出される電子ビームは、もし光軸方向の初速が共通であれば、(同期性によって) 無収差で一点に結像される。しかし、そのようなビームは単色ではない。

(4) ビームが単色の場合は、電子の出射角によって光軸方向の速度成分が異なるので、これによって球面収差が現れる。

(5) 軸外光源を出て絞りを通過する単色ビームは、光軸から離れるほど光軸方向の速度成分が減少し、これによって軸外収差が発生する。

(6) 色収差は、電子速度の光軸方向成分のばらつきによって生じる。

(7) 一様磁場の球面収差と色収差の符号は、いずれも正である。

2.5.5 実際の磁界レンズ

現実の磁界型レンズのつくる磁場は一様ではなく、光軸に沿って強度が変化するような局在した分布です。Fig.12 に、典型的な磁界型レンズの断面形状を示します。基本的には、光軸まわりに軸対称な電磁石です。コイルのまわりを、鉄などの磁性体で囲みます。磁性体の部分はヨーク (yoke) と呼ばれます。レンズ作用を発生させたい場所にヨークのギャップをつくり、そこから磁束を光軸方向にもらす構造になっています。

まずヨークが必要な理由に関して述べておきます。軸対称な電子レンズは収差が補正できないことはすでに記しました。しかしレンズの使い方によって、収差の影響を抑えることは可能です。(収差係数はレンズに固有の量ではなく、使い方まで含めて考えなければなりません。) 方法をひとこと言え、レンズの近軸領域だけを用いるということです。軸外ほどレンズ場の高次項が効いてきて、非線形の効果、すなわち収差が発生するからです。そこで、局在したレンズ場をつくって、その光軸近傍だけをビームが通るようにします。ある一定の集束作用をもつためには、局在させた分だけ強い磁場強度が必要です。そのようなレンズは、すなわち短焦点レンズということです。

つねにそのような磁場分布が理想的なのではありませんが、透過型電子顕微鏡の対物レンズではここで述べたことがあてはまります。その際には、試料は対物レンズ中の一番磁場の集中した場所に置かれ、光軸からある角度で試料を出た電子は、磁場によってすぐ光軸に向かって引き戻されるようにします。そのように出来るレンズがすなわち、収差の小さい、空間分解能の良いレンズであるわけです。収差を決めるのは磁

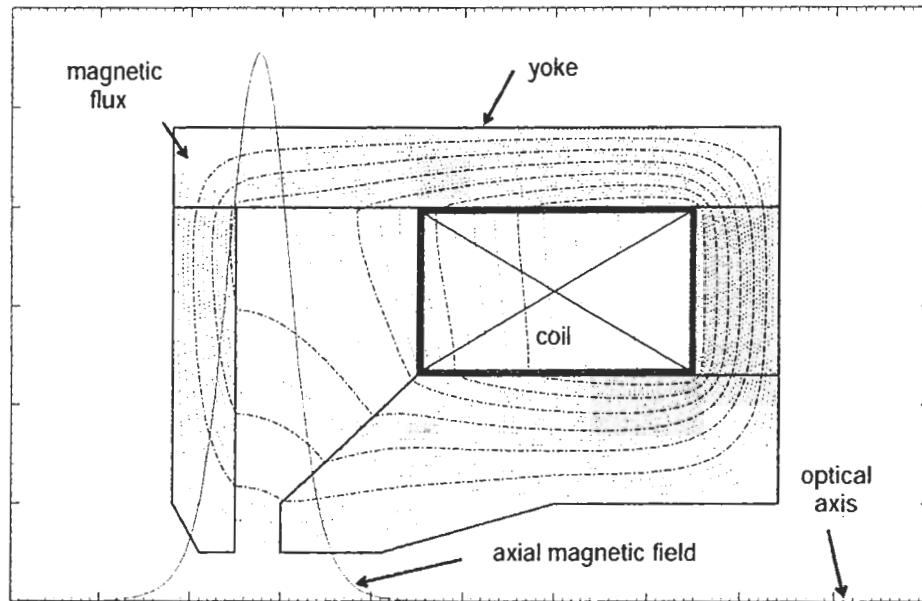


Fig. 12: Typical magnetic lens with a coil and yoke. Magnetic flux lines and axial magnetic field are also shown.

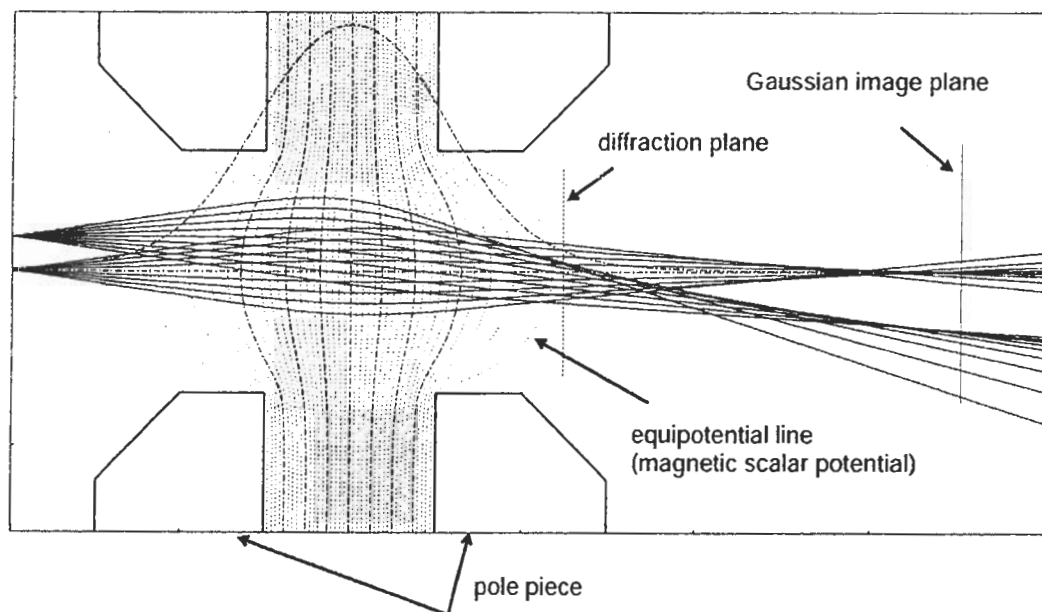


Fig. 13: Electron trajectories in a typical magnetic lens.

場の集中度であって、磁場分布の形状そのものは、一般に思われているほど収差に本質的な影響を与えません。

実際にそのように局在した磁場を形成するために、ヨークでコイルを囲み、ギャップ位置でのみ磁場が光軸にもれるようにします。どの程度集中した磁場分布をつくれるかは、ギャップ付近のヨーク形状が大きく影響します。用途に応じてこの部分だけ交換できるようにした場合が多くあり、交換部分はポールピース (pole piece) と呼ばれます。(Fig.12 ではヨークとポールピースを区別せずに描いています。) できるだけ集中した磁場をつくるために、ポールピースのギャップを狭め、先端を光軸に向かって尖らせた形状にします。しかしこれをやりすぎると、ポールピースが磁気飽和を起こしてギャップ以外で磁束がもれてしまい、かえって光軸上の磁場分布が広がってしまいます。

図のようなレンズでは、ヨークを回る磁束のうち光軸側に出てくる分はほんのわずかです。収差を小さくしようとすれば、磁場分布を局在させることを優先し、強度はコイル電流を増やすことで稼ぐという設計になります。ポールピース形状を決定するための磁場計算は有限要素法で行なえますが、収差の小さな形状を試行錯誤しながら決めていく作業はなかなか大変です。

なお、もし磁場のなかに試料を置かない場合、たとえば走査型電子顕微鏡のように試料と対物レンズにある程度距離が必要な場合は、少し設計方針が異なってきます。その際は、対物レンズに電子が入射するときにはすでに光軸から大きく離れてしまっています。そのような場合は、急に光軸方向に引き戻そうとせずに、やや広がった磁場分布で徐々に集束させるほうが、収差が小さくなります。ヨークとポールピースの形状は、そのような磁場をつくるように決められます。ただし残念ながら、そうするほうが収差が減ることの理由を定性的に説明するのは難しく、収差係数の計算公式を眺めながら議論する必要があります。しかしどちらにしろ、そのようなタイプのレンズでは光軸から離れた場所をビームが通ることになるので、磁場中に試料を置く方式よりも収差が大きくなってしまうことは避けられません。

次に、磁界型レンズ中のレイトレースの計算例を Fig.13 に示します。これは物面を磁場中心から少し離れた場合で、前章で示した静電レンズの計算例と同じ状況です。この図から、球面収差と軸外収差が存在していることがわかります。

図では磁気スカラーポテンシャル Ψ の等高線も同時に描いています。磁場との関係は $B(r) = -\nabla\Psi(r)$

で、磁力線は Ψ の等高線に直行します。この図の例では磁気飽和の影響はなく、ポールピースの表面は等ポテンシャルになっています。磁気飽和が問題にならない場合、たとえばコイル電流が小さい場合は、最初に左右のポールピースにたいして Ψ を指定して、それを境界条件としてラプラス方程式 $\Delta\Psi(r) = 0$ を解けば磁場が決定されます。つまり、電場と同じツールで磁場が計算できるということです。しかし、磁気飽和があるとポールピース表面は等ポテンシャルではなくなり、境界条件を与えることが出来ません。その際は、有限要素法などを用いて、磁性体を含めた空間全体で非線形の方程式を解く必要があります。

さて Fig.13 では、レンズ作用の強い場所では、とくに光軸付近では一様場とみなすことができます。図に示している電子軌道は、ラーモア面での軌道を示しています。一般の磁界レンズのラーモア面は、光軸上の磁場強度に依存して回転角が変わっていくようなものですが、そのラーモア面をやはりメリディオナル面と見なすことができます。磁界型レンズの近軸軌道や収差係数の計算は、すべてこのラーモア面を基準に行なわれます。

一様磁場の場合には、ラーモア面にのる軌道をつくるためにうまく初期条件を決めなければなりません。しかし今の場合は、電子は磁場のない場所から出発するので、磁場に向かって進んでいく過程で徐々にらせん運動をはじめます。場のない領域でメリディオナルな軌道であれば、磁場を感じて自然にラーモア面にのった運動をすることになります。このことは角運動の保存則を用いれば直ちに結論されますが、これは後章で詳しく述べることにします。

最後に、軸対称な電子レンズは収差を 0 に出来ないという事情に関して述べておきます。一様な磁場分布が収差を持つことはすでに見ました。磁場分布をうまく選べば収差を消せるのではないかと考えるのは、誰しも同じです。しかし、磁場分布をどう変えても収差は 0 にならないというのが、シェルツァーの定理の教えるところです。

光学レンズの場合は、屈折面の形状をうまく選ぶことで収差を消せることを前章で見ました。しかし電子レンズにおいては、磁極形状あるいは電極形状は自由に決められるものの、肝心の、電子が通る自由空間での場の分布は自由になりません。静電レンズでは静電ポテンシャル、磁界型レンズでは磁気スカラーポテンシャルはいずれも自由空間でラプラス方程式をみたさなければならず、境界条件をいろいろ変えるだけでは分布の自由度には限界があります。これが、光学レ

レンズと電子レンズの違いの本質的な部分です。

しかしながら、この議論は光学レンズより電子レンズの方が制約が大きいということを言っているだけで、電子レンズの収差が0にできないことの説明まではできません。この証明のためには、収差係数を具体的に場の関数として導く必要があります。この過程を示すことは、次回の内容となります。

2.6 文献

- [1] 坪井忠二訳, ファインマン物理学 I 力学, 岩波書店 (1967)
- [2] パリティ編集部編, 間違いだらけの物理概念, 丸善 (1993)
- [3] 今井功監訳, バークレー物理学コース 1 力学, 丸善 (1975)
- [4] 後藤敬典, 応用物理, 71, 433 (2002)
- [5] O. Keski-Rahkonen and M. O. Krause : J. Electron Spectrosc. Relat. Phenom. 13, 107 (1978)
- [6] O. Keski-Rahkonen : J. Electron Spectrosc. Relat. Phenom. 13, 113 (1978)